De tijd zal het leren

Rede uitgesproken door

C. Roos

op woensdag 10 december 2003 bij de openlijke aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica aan de Technische Universiteit Delft om werkzaam te zijn op het vakgebied Optimaliseringstechnieken.

Bach wrote on the title page of his *Orgelbüchlein*, ‘To the glory of the most high God, and that my neighbour may be benefited thereby’. That is what I would have liked to say about my work ([34, page 169]).

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)

Mijnheer de Rector Magnificus,
leden van het College van Bestuur,
collegae hoogleraren en andere leden van de universitaire gemeenschap,
zeer gewaardeerde studenten en overige toehoorders.

Dames en heren,

Inleiding

Mijn leeropdracht is Optimaliseringstechnieken. Ik stel mij daarom allereerst ten doel een beeld te schetsen waarin de relevantie van optimalisering, als onderdeel van de wiskunde, uit de verf komt. Daarbij hoop ik u deelgenoot te maken van de vreugde, om niet te zeggen verwondering, die de beoefening van wiskunde in het algemeen, en optimalisering in het bijzonder, verschaft.

Wiskunde wordt, meer dan elk van de overige zogenaamde exacte wetenschappen, nogal eens geassocieerd met begrippen als waarheid en zekerheid. In naam van de wetenschap wordt evenwel nogal eens *geleuterd*, zoals Ludwig Wittgenstein, één van de grootste filosofen van de twintigste eeuw, het uitdrukte. Daarom wil ik u ook het een en ander doorgeven van wat hij en anderen hebben gezegd over de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid.

Ik ben mij er van bewust dat wiskunde voor de meesten van u een min of meer onbekend, en daarom wellicht ook minder bemind terrein is. Omdat ik blij ben dat u er bent, hoop ik niemand van u het gevoel te geven voor niets te zijn gekomen. Hoewel de taal van wiskundigen veelvuldig gebruik maakt van zogenaamde formules, zal ik het gebruik daarvan zoveel mogelijk vermijden.

In mijn rede zal de nadruk liggen op wat je tegenwoordig met wiskunde kunt doen. Een alledaags probleem als het vinden van een kortste reisroute is hiervan een sprekend voorbeeld. De door velen van u gebruikte reisplanners en de snel ingang vindende navigatiesystemen in auto's maken gebruik van geavanceerde wiskundige algoritmen. Dergelijke systemen zouden praktisch onbruikbaar zijn als ze bijvoorbeeld een uur nodig hadden om een kortste reisroute te vinden. Dankzij het bestaan van efficiënte algoritmen en de huidige computertechnologie, is het mogelijk om de vele berekeningen die daarvoor nodig zijn in zeer korte tijd uit te voeren.

Een andere toepassing die velen van u zal aanspreken is Google, de verbazingwekkend snelle zoekmachine voor het web. Deze zoekmachine is ontwikkeld door twee studenten van de beroemde Universiteit van Stanford. Hun namen zijn Larry Page en Sergey Brin.[1] De twee ontmoetten elkaar aan de Universiteit van Stanford en nu 5 jaar geleden lanceerden zij samen het Google project [16]. Het hart van Google is het door hen ontwikkelde algoritme PageRank™. PageRank produceert een ranking van de pagina's op het Web en deze ranking wordt geheel bepaald door de linkstructuur van het Web. De ranking is dus onafhankelijk van de inhoud van de webpagina's. Geeft u een zoekopdracht, dan vindt Google de pagina's die daaraan beantwoorden en deze pagina's worden dan getoond in de door PageRank bepaalde volgorde. Deze volgorde wordt verkregen met behulp van een geavanceerde sorteermethode, en wordt eenmaal per maand berekend. Interessant is dat dit gebeurt door het berekenen van de eigenwaarden van wat waarschijnlijk 's werelds grootste matrix is. Deze (vierkante) matrix telde in mei 2003 namelijk 2,7 miljard rijen en kolommen [26].

Mijn voorlopig laatste voorbeeld is meer recreatief. Het is het in figuur 1 weergegeven portret van Prinses Máxima.[2] Het bijzondere van dit portret

Figuur 1 Prinses Máxima.

is dat het uit één gesloten lijn bestaat die zichzelf nergens kruist. Met enig geduld is het na te tekenen door ergens een zeer scherp geslepen potloodpunt neer te zetten en zonder deze van het papier te lichten de lijn te volgen. Bij aankomst in het beginpunt is het portret compleet.

Ik hoop dat deze smaakmakende voorbeelden uw belangstelling hebben gewekt voor het onderzoeksgebied dat tegenwoordig bekend staat onder de naam Optimalisering.

Het gebied is gedurende de laatste 50 jaren ontstaan als deelgebied van de zogenaamde Operations Research; pas sinds de laatste 10 à 20 jaar heeft het zich een eigen plaats verworven als zelfstandig onderzoeksgebied. De wortels ervan liggen in de vroege jaren van onze beschaving. Daarom wil ik nu eerst kort iets zeggen over de geschiedenis van de Optimalisering.

Optimaliseren in de geschiedenis

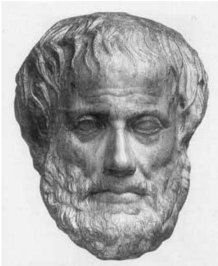
Een alleraardigst overzicht van de geschiedenis van het vak kan men vinden in een boekje met de speelse titel *Stories about Maxima and Minima* van de Russische wiskundige Tikhomorov [37]. Volgens hem en anderen is het oudst bekende optimaliseringsprobleem het volgende:

> *hoeveel land kan worden ingesloten door de huid van een stier?*

Dit merkwaardige probleem deed zich ongeveer 3000 jaar geleden voor toen de Fenicische prinses Dido met de lokale leider van een baai aan de Middellandse zee, in de buurt van het huidige Tunis onderhandelde over de koop van een stuk land. Zij bood een prijs voor een stuk land dat kon worden ingesloten door de huid van een stier. De koop werd gesloten, en vervolgens sneed Dido de huid van een stier in smalle repen, bond de repen aan elkaar, en sloot daarmee een stuk land in dat groot genoeg was om er later de stad Carthago op te bouwen. Het probleem staat nu bekend als het probleem van Dido. Het kan meer abstract worden geformuleerd als volgt:

> *gegeven de lengte van een gesloten kromme, vind het* maximale *door deze kromme ingesloten oppervlak.*

De gezochte kromme heeft de vorm van een cirkel. Waarschijnlijk wist de slimme prinses Dido dat al. Aristoteles wist het zeker. Dat was in de 4e eeuw voor Christus. Zenodorus, een wiskundige die moet hebben geleefd tussen de derde en de eerste eeuw voor Christus, kwam heel dicht bij de oplossing. Hij bewees dat als het oppervlak een n-hoek was, deze regelmatig moest zijn. Maar het volledige bewijs werd pas geleverd door Hermann A. Schwarz (1843 - 1921), een student van Karl Weierstrass (1815-1897), de vader van de moderne analyse.

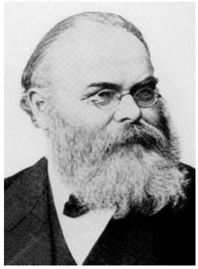


Aristoteles

384 – 322 B.C.

Karl Weierstrass

1815 – 1897



Hermann Schwarz

1843 – 1921

Er zouden veel meer voorbeelden te noemen zijn. De brekingswet van het licht bijvoorbeeld:

> *In een niet-homogeen medium plant het licht zich voort, van het ene punt naar het andere punt, langs een weg waarvoor de benodigde tijd* minimaal *is.*

Het is één van de vele zogenaamde *optimaliteitsprincipes* in de natuur. Dit principe werd ontdekt door de Nederlandse meetkundige Snel(lius), die door de beroemde astronoom Johann Kepler de Apollonius van zijn tijd werd genoemd [37, pag. 48]. Later gaf de Franse wiskundige Fermat een (ingewikkeld) wiskundig bewijs en weer later de Nederlander Christiaan Huygens een veel eenvoudiger, meetkundig bewijs.

We doen een grote stap in de tijd en slaan veel beroemde namen en prachtige historische voorbeelden over. Het eerste wetenschappelijke tijdschrift, *Acta Eruditorum*, verscheen sinds 1682. In het exemplaar van juni 1696 stelde de Zwitserse onderzoeker Johann Bernouilli een probleem met de intrigerende titel *A new problem that mathematicians are invited to solve*:

> *Laten twee punten A en B gegeven zijn in een verticaal vlak. Vind de kromme tussen A en B die een punt M, bewegend langs deze kromme, moet volgen om, beginnend in A, in de* kortst *mogelijke tijd het punt B te bereiken, onder invloed van het eigen gewicht.*

De gezochte kromme heet de *brachistochrone*. Veel wiskundigen namen de uitnodiging aan: Leibniz, Jakob Bernouilli (Johann's broer), l'Hospital, en (anoniem) Isaac Newton[3]. Zij vonden allen dezelfde oplossing: *de brachistochrone is een cycloïde.* Het brachistochrone probleem was voorbestemd om een grote rol te spelen in de wiskundige analyse. Het bleek het eerste te zijn in een lange reeks van problemen die de basis vormen van wat nu wel *variatierekening* wordt genoemd.

Tot in de jaren '50 van de vorige eeuw had men bij de bestudering van optimaliseringsvraagstukken weinig meer ter beschikking dan papier en potlood, met als gevolg dat men zich veelal moest beperken tot problemen waarvan de oplossing expliciet kon worden gegeven in de vorm van een of andere formule. Zolang men dat niet kon, was het probleem niet opgelost. De oplossing van meer ingewikkelde vraagstukken waarvan de oplossing alleen kan worden gevonden door het uitvoeren van rekenintensieve iteratieve rekenprocedures, moest wachten tot de komst van de computer. Hiertoe behoren veel problemen in de praktijk van allerlei takken van toegepaste wetenschap. Ik zal er straks een aantal voorbeelden van geven.

Optimaliseren nu

Optimaliseringstechnologie is tegenwoordig een essentieel onderdeel van de besluitvorming op allerlei gebieden: luchtvaart, biotechnologie, economie, landbouw, energie, telecommunicatie, internet, etc. Een overzicht uit 1993 van de vijfhonderd grootste bedrijven in de Verenigde Staten laat zien dat bijna 85% van deze bedrijven lineaire optimalisering gebruikten [9]. Allerlei gecompliceerde planningsproblemen in de luchtvaart, zoals het toewijzen van vliegtuigen aan geplande vluchten en de toewijzing van bemanningen aan vliegtuigen, lenen zich uitstekend voor het gebruik van optimaliseringstechnieken. Hierdoor gerealiseerde besparingen, zelfs als deze slechts enkele procenten van de omzet bedragen, kunnen beslissend zijn voor de overlevingskansen van een bedrijf.

Als wetenschappelijke discipline kon het gebied ontstaan en floreren dankzij de opkomst van de digitale computer. Gedurende de Tweede Wereldoorlog werd optimalisering voor het eerst op grote schaal toegepast om er logistieke en operationele problemen voor militaire doeleinden mee te modelleren en op te lossen. George Dantzig was een van de degenen die hierbij betrokken was; hij ontwikkelde kort na de Tweede Wereldoorlog het eerste algoritme voor het oplossen van lineaire optimaliseringsmodellen, de zogenaamde Simplex methode. Sindsdien vond lineaire optimalisering veel nieuwe, ook civiele toepassingen.

Na 1950 maakte het gebied een snelle groei door. Onder invloed van de opkomende informatica werd in de jaren '70 steeds indringender de vraag gesteld naar de efficiëntie van algoritmen. Tot die tijd was men veelal al tevreden als men de correctheid van een algoritme kon aantonen. Toen Klee en Minty in 1972 een voorbeeld gaven van een lineair optimaliseringsprobleem met 50 variabelen waarvoor de Simplex methode tientallen jaren rekentijd zou vergen, werd dat als zeer schokkend ervaren.

Belangrijke doorbraken haalden de voorpagina van toonaangevende kranten, zoals de New York Times. Dat gebeurde in 1979, toen de Rus Leonid Khachyan [20] de eerste efficiënte methode voor lineaire optimalisering vond, de Ellipsoïde methode, en 5 jaar later opnieuw, toen Narendra Karmarkar [19] een tweede efficiënte methode publiceerde, de zogenaamde Inwendige Punt methode. Zijn werk gaf een enorme impuls aan de verdere ontwikkeling van het gebied, waardoor tegenwoordig problemen kunnen worden opgelost in fracties van minuten waarvoor nog niet zo lang geleden de benodigde rekentijd uren, dagen, maanden of zelfs jaren zou zijn geweest [25, 28].

Onopgemerkt bleef lange tijd het werk van Ilya Dikin, uit de jaren '60, een Russisch wiskundige. Aan het eind van de jaren '80, na de opwinding over het werk van Karmarkar, bleek Dikins Affiene-schalings methode voor lineaire optimalisering de basis te vormen van een patent van AT&T op het werk van Karmarkar. Achteraf bleek in Rusland veel meer belangrijk werk op dit gebied te zijn gedaan. Het eerder genoemde werk van Khachyan bleek te berusten op een door Shor ontwikkelde methode voor niet-lineaire optimalisering. Twee andere Russen, Yudin en Nemirovski, waren pioniers op het gebied van de complexiteit voor niet-lineaire optimalisering [18, 29, 30].

Een volgende doorbraak was een boek van Nemirovski en Nesterov in 1990 [31]. Zij bewezen dat ieder niet-lineair probleem kan worden geformuleerd als een convex probleem en ieder convex probleem als een kegel-probleem. Een kegel probleem is een optimaliseringsprobleem waarvan de doelfunctie lineair is en het domein de doorsnede van een convexe kegel en een affiene ruimte. De vraag of een optimaliseringsprobleem efficiënt oplosbaar is herleidden zij tot de volgende twee vragen:

- is het convexe omhulsel van het domein efficiënt berekenbaar?
- heeft de convexe kegel van het probleem een (voldoende) gladde barrièrefunctie die efficiënt berekenbaar is?

Voorbeelden van dergelijke ‘goede’ kegels zijn de kegel bestaande uit alle niet-negatieve vectoren, de Lorenzkegel[4] en de zogenaamde semidefiniete kegel. De laatste kegel bestaat uit alle positief semidefiniete matrices. Een matrix heet positief semidefiniet als de matrix het kwadraat is van een symmetrische matrix. Elk kegelprobleem waarin een van deze drie kegels de onderliggende kegel is kan efficiënt worden opgelost.

Een ander hoogtepunt is een recent boek van Ben-Tal en Nemirovski [2]. Behalve een volledige theorie van de kegel-optimalisering geven zij indrukwekkend mooie technische toepassingen. Hieronder vallen stabiliteitsproblemen in de regel- en systeemtheorie en design-problemen in de elektrotechniek en de mechanica. Anderzijds schenkt het boek ook aandacht aan moeilijke combinatorische problemen, zoals bijvoorbeeld de berekening van de Shannon capaciteit van een graaf. Een ander belangrijk onderwerp dat uitvoerig de aandacht krijgt is een nieuwe benadering van robuuste optimalisering [3], met zeer aansprekende voorbeelden. Helaas laat de tijd niet toe om hiervan een voorbeeld geven.

Met enige trots mag wel worden vermeld dat het zojuist genoemde boek van Ben-Tal en Nemirovski is ontstaan uit colleges die Nemirovski in 1998 en Ben-Tal in 2001 als gasthoogleraar in Delft gaven. Sindsdien is dezelfde cursus op veel andere plaatsen gegeven, waaronder dit jaar aan Georgia Tech in Atlanta. Twee maanden geleden, in oktober van dit jaar, ontving Nemirovski, mede op basis van dit boek, tijdens de jaarlijkse conferentie van de internationale vakorganisatie INFORMS (Institute for Operations Research and Management Science) de prestigieuze John von Neumann Theory Prize .

Veel praktische optimaliseringsproblemen zijn combinatorisch van aard. Dankzij allerlei geavanceerde zoektechnieken, met technische namen als branch-and-bound, branch-and-cut, kolom-generatie, decompositie-technieken en methoden uit de polyhedrale combinatoriek kunnen we tegenwoordig veel van dergelijke praktische problemen in korte tijd min of meer routinematig oplossen met behulp van commerciële optimaliseringspakketten, zoals CPLEX en Xpress-MP.[5 6] Het dit jaar verschenen boek *Combinatorial Optimization* van de Nederlandse collega Lex Schrijver is een goede kandidaat om het standaardwerk voor de komende decennia te zijn [35].

Anderzijds zijn er heel veel, vanuit praktisch oogpunt belangrijke, combinatorische problemen die niet exact kunnen worden opgelost. Voor dergelijke problemen moet men de toevlucht nemen tot heuristische methoden. Ook op dit gebied zijn er de laatste tientallen jaren interessante ontwikkelingen geweest: *Metaheuristieken*, zoals 'local search' [1], 'tabu search' [13], 'simulated annealing' [21], 'genetische algoritmen' [15], 'neurale netwerken' en 'greedy randomized adaptive search procedures' [10] maken het de gebruiker mogelijk om kwalitatief goede oplossingen van moeilijke problemen te vinden in een redelijke tijd.

Na deze heel ruwe schets van de stand van zaken in het gebied wil ik nu enkele meer concrete illustraties geven van optimaliseringsproblemen. Achtereenvolgens zullen we kijken naar een aantal standaardproblemen: het kortste padprobleem, het locatieprobleem, het handelsreizigersprobleem en het vinden van de minimale waarde van een veelterm.

Enkele voorbeelden

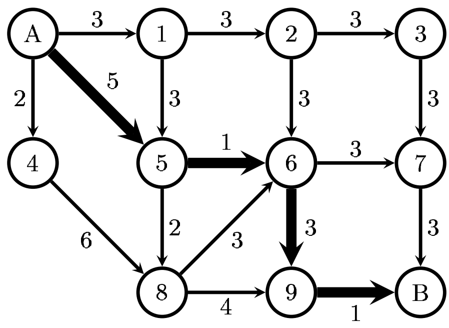
Kortste paden

Voor velen is het vinden van de snelste route van huis naar het werk een dagelijks terugkerend probleem. Het staat bekend als het kortste padprobleem en kan eenvoudig worden gemodelleerd met behulp van een zogenaamde graaf of netwerk. Figuur 2 toont hiervan een voorbeeld. De knopen stellen de kruispunten voor van wegen en straten. Een weg tussen twee kruispunten wordt gerepresenteerd door een lijn (of tak) die de corresponderende knopen verbindt. Aan elke tak kennen we een positieve getalwaarde toe die gelijk is aan de lengte of de reistijd van het betreffende weggedeelte. Ook als deze getalwaarde een reistijd voorstelt noemen we het de lengte van de tak.

In het netwerk van figuur 2 zijn er meerdere paden van knoop A naar knoop B. Een kortste pad is aangegeven door middel van dik getekende pijlen. Het is duidelijk dat in de praktijk het aantal knopen veel groter is dan in dit simpele voorbeeld. Een veel gebruikte digitale kaart van Nederland bijvoorbeeld telt 810.833 knopen en 1.087.420 takken [36]. Het snel vinden van een kortste pad van een vertrekpunt A naar een bestemming B vergt dan een zeer efficiënt algoritme. Reisplanners en navigatiesystemen zijn gebaseerd op dergelijke algoritmen.

Kortste padproblemen hebben een veel groter toepassingsgebied dan men bij eerste kennismaking zou verwachten. We noemen er een aantal.

1. De meest voor de hand liggende toepassing is al genoemd: het vinden van een kortste reisroute van A naar B. In communicatienetwerken

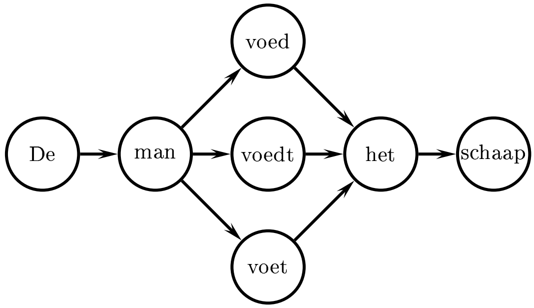


Figuur 2 Voorbeeld van een kortste padprobleem.

(internet!) doet zich hetzelfde probleem voor: als we vanuit Delft een e-mailbericht naar Tokyo sturen wordt in principe het bericht door routers in tussenliggende schakelstations doorgestuurd naar een schakelstation dat ligt op een kortste route naar Tokyo.

2. Een cruciaal probleem bij spraakherkenning, het automatisch omzetten van gesproken in geschreven tekst, is het onderscheiden van gelijkluidende woorden, zoals *voet*, *voedt* en *voed*. Daartoe vormen we een graaf met de mogelijke woorden in een zin als knopen en met een gerichte tak tussen elk tweetal opeenvolgende woorden. Als we voor de taklengten een maat nemen voor de kans op het voorkomen van het betreffende paar woorden, dan kan de best mogelijke interpretatie van een zin worden gevonden door een kortste pad te bepalen van het eerste woord naar het laatste woord in de zin. Zie figuur 3.
3. Beeldsegmentatie is een ander voorbeeld. Beschouw het probleem om twee objecten in bijvoorbeeld een MRI-scan van elkaar te scheiden. Dit wordt gedaan door een lijn tussen twee punten te vinden die het kleinste aantal donkere pixels bevat. De pixels zijn de knopen van de graaf, en de lengte van een tak nemen we korter naarmate de twee pixels die de tak verbindt lichter zijn. Een kortste pad tussen de twee punten markeert een optimale scheidingslijn. Dezelfde techniek wordt ook gebruikt om de contour van bijvoorbeeld het hart in een röntgenopname te bepalen.

In veel toepassingen moeten grote aantallen kortste paden worden uitgerekend waardoor het beschikken over een efficiënt algoritme nog urgenter wordt. Het algoritme van de Nederlandse informaticus Edger



Figuur 3 Voorbeeld van een zin.

Wiebe Dijkstra (1930-2002) is het meest bekende en meest gebruikte. De werking van dit algoritme valt in het kort te beschrijven. Het kent aan elke knoop v in de graaf een getalwaarde (of *label*) π_v toe; deze waarde kent het algoritme toe aan knoop v als het een pad ter lengte π_v van A naar v gevonden heeft. De waarde van π_v is dus altijd gelijk aan de lengte van een pad van A naar v en daarom groter dan of gelijk aan de lengte van het kortste pad van A naar v. Aan het eind van het algoritme is π_B gelijk aan de lengte van het kortste pad van A naar B.

In elke iteratie wordt een knoop *verkend* en het algoritme houdt een lijst Q bij van nog te verkennen knopen.

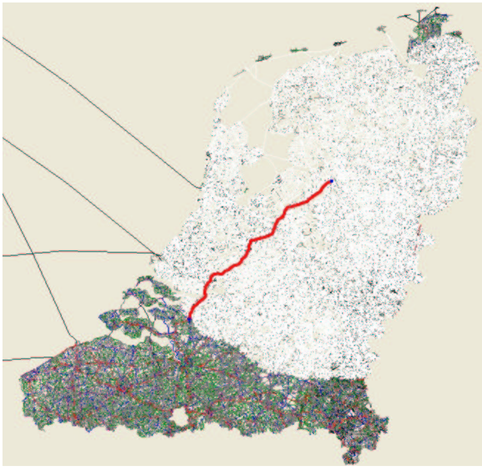
Aanvankelijk bevat Q alleen knoop A en hebben alle knopen het label ∞ (het wiskundige symbool voor oneindig) behalve knoop A: die krijgt het label 0, de lengte van het kortste pad naar A.

Een iteratie bestaat uit het kiezen en vervolgens verkennen van een knoop u uit de lijst Q. We kiezen daarvoor een knoop in Q waarvoor π_u minimaal is. Deze knoop wordt uit Q verwijderd en vervolgens verkend. Tijdens het verkennen van knoop u wordt voor elke knoop v die met u verbonden is het label π_v al dan niet aangepast: als het pad via u naar v korter is dan π_v dan maken we π_v gelijk aan de lengte van dit kortere pad. Dus geven we dan v als nieuw label de som van π_u en de lengte van de tak van u naar v; verder wordt de knoop v toegevoegd aan Q.

De wijze waarop de te verkennen knoop wordt gekozen zorgt ervoor dat op het moment dat een knoop wordt verkend het label van die knoop gelijk is aan de lengte van het kortste pad van A naar die knoop. Dit heeft twee belangrijke gevolgen:

1. Als knoop B aan de beurt is om te worden verkend dan is de lengte van het kortste pad van A naar B gevonden. Ons doel is dan bereikt en het algoritme kan worden beëindigd.
2. Als het algoritme stopt dan heeft het alle knopen verkend die dichter bij A liggen dan B.

Wat het laatste betekent wordt duidelijk uit figuur 4. Dijkstra's algoritme

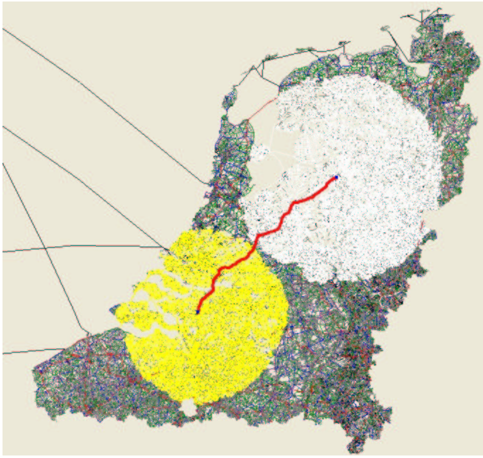


Figuur 4 Van Zwolle naar Rosendaal met Dijkstra's algoritme.

doorzoekt bijna heel Nederland wanneer Zwolle het vertrekpunt en Rosendaal de bestemming is. Het is duidelijk dat hier heel veel overbodig zoekwerk wordt gedaan.

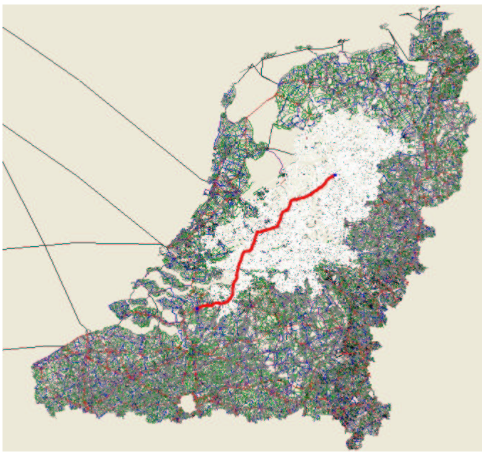
Ongeveer de helft van het werk kan worden bespaard door Dijkstra parallel te laten rekenen vanuit beide eindpunten van de route tegelijk. De straal van de twee zoekcirkels is ongeveer gelijk aan de helft van de straal van de oorspronkelijke zoekcirkel. Het nu doorzochte oppervlak wordt daarom (ruwweg) gehalveerd en de besparing in rekentijd is navenant, ongeveer 50%. Zie figuur 5.

Een ander nuttig idee is afkomstig uit het gebied van de Kunstmatige Intelligentie en leidt tot het A^*-algoritme, een variant van het algoritme van Dijkstra. Het A^*-algoritme gebruikt een makkelijk te berekenen ondergrens



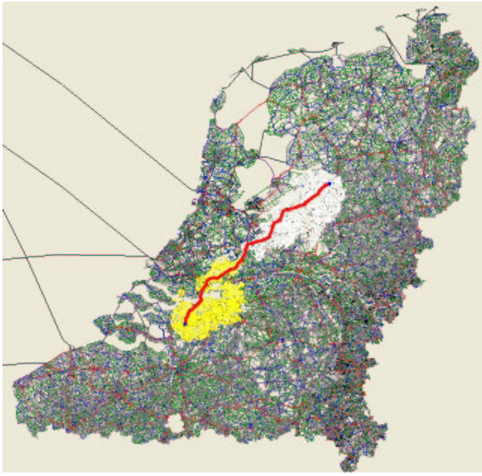
Figuur 5 Parallelle versie van Dijkstra's algoritme.

d_v voor de lengte van een kortste pad van v naar B en verkent steeds de knoop waarvoor $\pi_v + d_v$ minimaal is. Voor d_v kan bijvoorbeeld de hemelsbrede afstand van v naar B worden genomen. Het effect hiervan is veelbelovend: het zoekgebied wordt aanmerkelijk kleiner. Zie figuur 6. Door beide ideeën te combineren en het A^*-algoritme parallel uit te



Figuur 6 Van Zwolle naar Rosendaal met het A^*-algoritme.

voeren krijgen we de situatie in figuur 7. De besparing in rekentijd is nu



Figuur 7 Parallelle versie van het A^* algoritme.

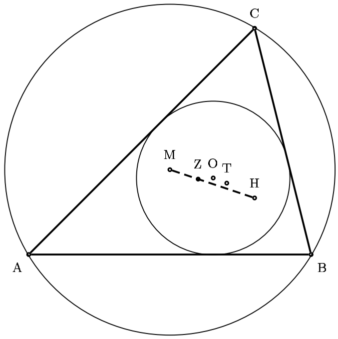
moeilijker te voorspellen. Maar een recente vergelijkende studie, uitgevoerd in het kader van een promotieonderzoek, heeft aangetoond dat op deze wijze de originele versie van het algoritme van Dijkstra gemiddeld met een factor 300 kan worden versneld, mede door het gebruik van slimme datastructuren [23].

Het onderzoek aan dit klassieke probleem gaat nog altijd door. Een van de belangrijke uitdagingen in het huidige onderzoek is het vinden van een *robuust* kortste pad, dat wil zeggen een kortste pad waarvan de lengte niet al te zeer wordt beïnvloed door optredende variaties in de taklengten. De bedoeling hiervan is, onder andere, om het effect van vertragingen in het verkeer te minimaliseren. Ook dit is onderwerp van een lopend promotieonderzoek.

Plaatsing van distributiecentra

Een bekend probleem uit de vlakke meetkunde is het volgende: gegeven een driehoek ABC vind het punt dat gelijke afstanden heeft tot de hoekpunten A, B en C. Het gezochte punt is het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC; het ligt op dezelfde lijn die het zwaartepunt Z en het hoogtepunt H van de driehoek verbindt; de betreffende lijn staat bekend als de lijn van Euler.

Een gerelateerd probleem is het vinden van een punt waarvoor de som van de afstanden tot A, B en C minimaal is. Het betreffende punt T is het zogenaamde *Torricelli punt*, en er bestaat een niet zo bekende, maar mooie meetkundige constructie van dit punt. In figuur 8 zijn de genoemde punten en het middelpunt O van de ingeschreven cirkel aangegeven; de punten O en T liggen, zoals blijkt uit de figuur, niet op de Eulerlijn.



Figuur 8 De Euler lijn van een driehoek.

Stel nu dat er meerdere punten $A_1, A_2 \ldots A_n$ in het platte vlak gegeven zijn, met $n \geq 4$. Dan is het vinden van een punt x dat de som van de afstanden tot deze n punten minimaliseert ineens veel moeilijker. Het komt neer op het oplossen van het probleem

$$\text{minimaliseer } \; \|x - A_1\| + \|x - A_2\| + \ldots + \|x - A_n\|\,,$$

waarin x het gezochte punt voorstelt. Door dit probleem te herformuleren als

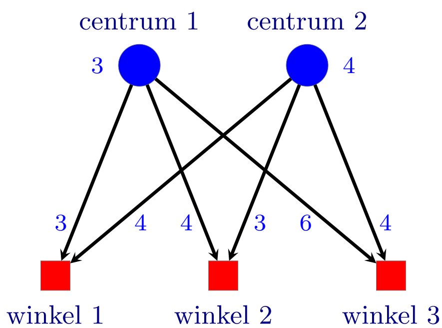
$$\begin{array}{ll} \text{minimaliseer} & \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \\ \text{zodanig dat} & \|x - A_1\| \leq \alpha_1 \\ & \|x - A_2\| \leq \alpha_2 \\ & \qquad \vdots \\ & \|x - A_n\| \leq \alpha_n \end{array}$$

wordt het een zogenaamd lineair optimaliseringsprobleem over Lorenz kegels. Omdat hiervoor efficïente algoritmen bestaan (zie pag. 11) is vanuit algoritmisch standpunt bezien dit probleem hiermee opgelost.

Een voor de hand liggende toepassing hiervan is het vinden van een optimale locatie x voor een distributiecentrum van waaruit diverse winkels A_1, A_2 tot en met A_n moeten worden bevoorraad. De som van de afstanden van de winkels tot het distributiecentrum kan hiermee worden geminimaliseerd. Dit vertaalt zich onmiddellijk in het minimaliseren van de totale rijtijd van een vrachtwagen die de winkels vanuit het distributiecentrum bevoorraadt.

Een nog moeilijker probleem ontstaat als de winkels moeten worden bevoorraad vanuit meerdere distributiecentra. We nemen eenvoudigheidshalve aan dat een aantal mogelijke locaties van de distributiecentra gegeven zijn en dat het probleem bestaat uit het selecteren van geschikte locaties voor de centra, zodanig dat de som van de operationele kosten van de centra en de transportkosten naar de winkels wordt geminimaliseerd. Dit probleem staat bekend als het *facility location* probleem. Als bekend is welke distributiecentra open zijn, dan is de toewijzing van de winkels aan de centra eenvoudig: kies voor elke winkel het (of een) centrum met de laagste transportkosten.

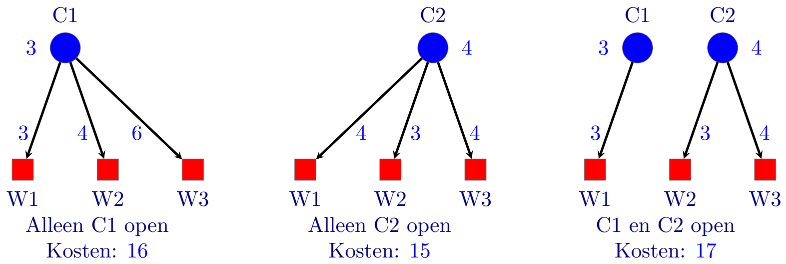
Ter illustratie een klein voorbeeld met 2 mogelijke centra en 3 winkels. De operationele kosten van de centra en de transportkosten naar de winkels zijn zoals aangegeven (in miljoenen Euro's) in figuur 9. De 3 mogelijke



Figuur 9 Een facility locatie probleem.

oplossingen zijn weergegeven in figuur 10. Deze zijn eenvoudig te vinden.

Voor elk centrum zijn er twee mogelijkheden: het centrum is open of dicht. Omdat niet alle centra dicht mogen zijn, geeft dit $2^2 - 1 = 3$ mogelijkheden. In dit eenvoudige voorbeeld wordt de goedkoopste oplossing gevonden door



Figuur 10 Oplossingen van het facility locatie probleem.

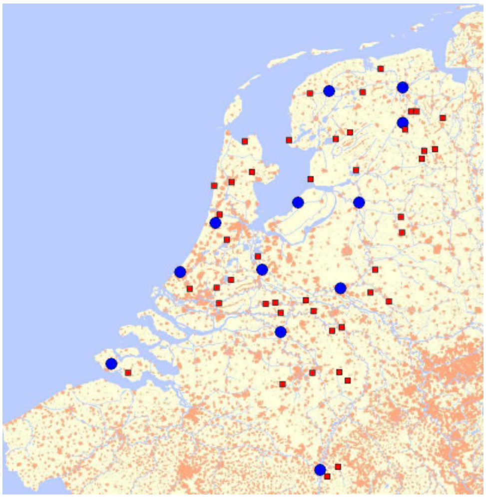
alleen distributiecentrum 2 te openen.

Figuur 11 toont een meer realistisch voorbeeld van een dergelijk probleem. In deze figuur zijn de 12 provinciehoofdsteden van Nederland mogelijke locaties voor distributiecentra. Verder zijn er ca 60 winkels die door de te kiezen centra moeten worden bevoorraad. Figuur 12 toont een oplossing met 5 distributiecentra.

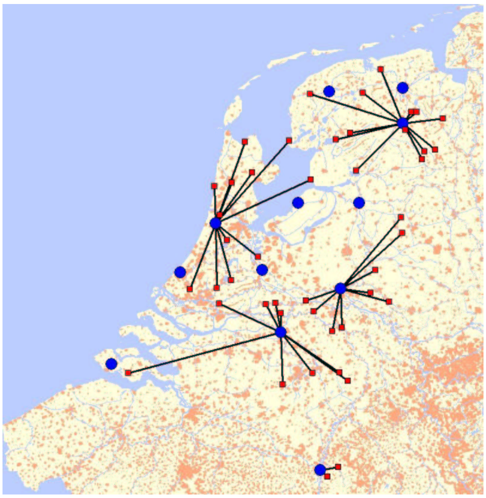
Het moeilijke deel van het probleem is om te bepalen welke centra moeten worden geopend om de laagste totale kosten te krijgen. Als er meerdere centra zijn, zeg k, dan kan dit op $2^k - 1$ manieren. Voor $k = 50$ geeft dit 1125899906842623 mogelijkheden. Een heel snelle computer heeft dan minstens 13 dagen nodig om alle mogelijkheden na te gaan en vervolgens de beste oplossing te vinden. Voor $k = 60$ is het aantal mogelijkheden 1152921504606846975 en de benodigde rekentijd minstens 36 jaar en voor $k = 70$ is de benodigde rekentijd al meer dan 37000 jaar. Dit verschijnsel heet *combinatorische explosie*: als het aantal centra toeneemt, neemt de rekentijd exponentieel toe. Algoritmen met een exponentieel toenemende rekentijd zijn in de praktijk onbruikbaar. Dat is de reden waarom in de praktijk zogenaamde *polynomiale* algoritmen nodig zijn. Dat zijn algoritmen waarvoor de rekentijd evenredig is met k, of met het kwadraat (of eventueel een hogere macht) van k, omdat anders de rekentijd voor grotere problemen onaanvaardbaar hoog wordt.

In de praktijk betekent het bovenstaande dat we problemen zoals het facility location probleem nooit exact zullen kunnen oplossen, ook niet als

1



Figuur 11 Een meer realistisch facility locatie probleem.



Figuur 12 Oplossing van het probleem in Figuur 11.

de computers nog weer veel sneller zouden zijn dan de huidige generatie. Dat is heel jammer omdat veel praktische problemen equivalent zijn met het facility location probleem. Als voorbeelden noemen we het ontwerpen van communicatienetwerken of mobiele telefonie netwerken: de facilities vervangen we dan door servers dan wel antennemasten en de winkels door de aangesloten terminals dan wel abonnees.

U zult zich afvragen hoe dit soort problemen dan in de praktijk wordt opgelost. In de praktijk behelpt men zich met heuristische methoden (zie pag. 12). Een voordeel van deze methoden is dat ze in redelijke tijd een oplossing vinden, maar een nadeel is dat de gebruiker geen idee heeft hoever de gevonden oplossing afwijkt van een optimale oplossing.

In dit opzicht is er tegenwoordig een goed alternatief, dat ik kort wil bespreken. Stel dat in een optimale oplossing de totale kosten K^* zijn. Een (niet-optimale) oplossing, waarvoor de kosten K zijn, heet een α-benaderende oplossing als

$$\frac{K}{K^*} \leq \alpha.$$

Hierbij is, uiteraard, $\alpha \geq 1$. Een polynomiaal algoritme dat voor *elk* facility location probleem een α-benaderende oplossing oplevert, met α vast, heet een α-benaderend algoritme.

Voor het facility location probleem is in 1990 aangetoond dat er geen 1-benaderend (dit is een exact) polynomiaal algoritme bestaat [6]. Erger nog, in 1998 werd bewezen dat er geen 1.463-benaderend algoritme bestaat [14]. Dit is te beschouwen als een heel negatief resultaat. Het maakt duidelijk dat het in het algemeen onmogelijk is om in polynomiale tijd dichtbij een optimale oplossing te komen.

Er zijn echter ook positieve resultaten. Enkele daarvan zijn samengevat in tabel 1. Het beste resultaat is van 2002, met $\alpha = 1,517$. We weten al dat α niet kleiner kan zijn dan $\alpha = 1,463$. Het is een uitdagende vraag of het 'gat' tussen deze twee getallen verder kan worden verkleind. Verder onderzoek zal dit moeten uitwijzen.

Er kan worden opgemerkt dat in de praktijk de kwaliteit van de verkregen oplossingen veel beter is dan de gegarandeerde waarde α: de afwijking van optimaal is bijna nooit meer dan ca. 3%.

Handelsreizigers probleem

Het is heel eenvoudig om het probleem van de handelsreiziger te formuleren: een handelsreiziger wil vanuit de stad waar hij verblijft een

α	Auteur	Methode
$1 + \log k$	Hochbaum (1982)	Greedy
3,16	Shmoys et al. (1997)	LP rounding
2,408	Guha and Kuller (1998)	LP rounding + Greedy
1,736	Chudak (1998)	LP rounding
1,728	Charika and Guha (1999)	LP + Primal-dual + Greedy
1,610	Jain et al. (2001)	Greedy algorithm
1,582	Svridenko (2002)	LP rounding
1,517	Mahdian et al. (2002)	Revised Greedy algorithm

Tabel 1 Positieve resultaten voor het facility locatie probleem.

aantal steden bezoeken en daarna terugkeren in de stad van verblijf. De onderlinge afstanden tussen de steden zijn bekend. De vraag is een kortste route te vinden voor de handelsreiziger.

De eenvoud van de formulering is bedrieglijk. Dit probleem is berucht omdat het zo moeilijk op te lossen is. Als het aantal steden 50 is, dan is het aantal mogelijke routes voor de handelsreiziger gelijk aan 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000. Een directe (dat wil zeggen enumeratieve) benadering van het probleem, waarbij voor alle routes de lengte wordt berekend, zou op een onwaarschijnlijk snelle computer met een kloksnelheid van 1 Terahertz (= 1000 Gigahertz) ongeveer 2.64×10^{42} jaar rekentijd nodig hebben. Voor 22 steden is de rekentijd wel veel minder, maar toch altijd nog meer dan 35 jaar. Het werd daarom als een grote doorbraak beschouwd toen Dantzig, Fulkerson, and Johnson [7] in 1954 een methode publiceerden waarmee zij een probleem met 49 steden konden oplossen. In die tijd was dat een enorme prestatie. Hun benadering berustte op een lineair model met geheeltallige variabelen. Sindsdien heeft het handelsreizigersprobleem vaak gediend om er de kracht van nieuwe optimaliseringstechnieken mee te testen, zoals branch-and-bound, branch-and-cut, simulated annealing, etc. De competitie om wie het grootste handelsreizigersprobleem kan oplossen, gaat nog altijd door. Tabel 2 laat dit zien.

Jaar	Team	Steden
1954	G. Dantzig, R. Fulkerson, S. Johnson	49
1971	M. Held, R.M. Karp	64
1975	P.M. Camerini, L. Fratta, F. Maffioli	100
1977	M. Grötschel	120
1980	H. Crowder, M.W. Padberg	318
1987	M. Padberg, G. Rinaldi	532
1987	M. Grötschel, O. Holland	666
1987	M. Padberg, G. Rinaldi	2.392
1994	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook	7.397
1998	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook	13.509
2001	D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook	15.112

Tabel 2 Resultaten voor het handelsreizigersprobleem.

Het record staat momenteel op een handelsreizigersroute langs 15.112 steden in Duitsland. Figuur 13 toont deze route en twee andere routes. De berekening van de route langs 15.112 steden vergde meer dan 18 CPU jaren. In werkelijkheid werd de oplossing in enkele maanden gevonden door het rekenwerk te verdelen over een netwerk van 110 werkstations.

Het op pagina 6 getoonde portret van prinses Máxima bestaat uit een handelsreizigersroute van 117.907 geschikt geplaatste virtuele steden op een foto; de gebruikte route is (uiteraard) niet optimaal.

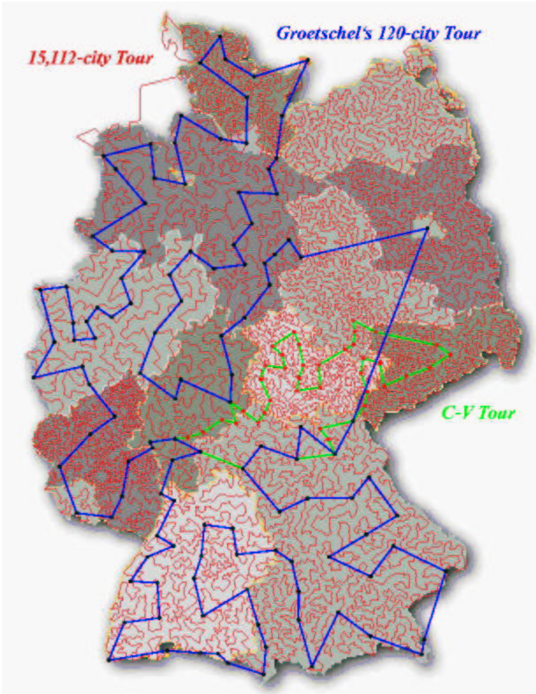
Minimaliseren van een veelterm

De tot nu toe gegeven voorbeelden waren combinatorisch van aard. We eindigen met een voorbeeld uit de continue optimalisering.

We beginnen met iets dat de meesten van u wel zullen herkennen: het oplossen van de kwadratische veelterm-vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

met $a \neq 0$. Door een kwadraat af te splitsen schrijven we de vergelijking



Figuur 13 Handelsreizigersroutes langs steden in Duitsland.

als

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c = \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

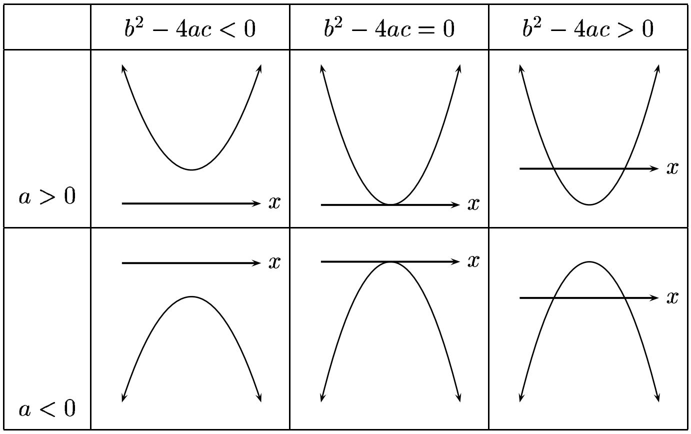
Door beide leden te delen door a en vervolgens de wortel te trekken vinden we de bekende abc-formule:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

We concluderen hieruit dat de veelterm

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

geen nulpunten heeft als $b^2 - 4ac < 0$, precies 1 nulpunt ($x = -\frac{b}{2a}$) als $b^2-4ac = 0$ en precies 2 nulpunten als $b^2-4ac > 0$. Afhankelijk van het teken van a is de grafiek van $p(x)$ een bergparabool dan wel een dalparabool. De zes mogelijkheden die zich kunnen voordoen zijn weergegeven in figuur 14.



Figuur 14 Zes mogelijkheden voor de grafiek van een kwadratische veelterm.

We stellen vervolgens de vraag of eenvoudig is vast te stellen voor welke waarden van de coefficiënten a, b en c de waarden van $p(x)$ altijd groter dan of gelijk aan 0 zijn. Met behulp van de figuur is het antwoord onmiddellijk te geven: dit geldt dan en slechts dan als

$$a > 0,\ c \geq 0, \quad b^2 - 4ac \leq 0.$$

Als we ook de waarde $a = 0$ toelaten, dat is het geval dat $p(x)$ lineair is, dan worden de voorwaarden voor $p(x)$ altijd groter dan of gelijk aan 0:

$$a \geq 0,\ c \geq 0, \quad b^2 - 4ac \leq 0.$$

Het geval wil, en deze stap is alleen duidelijk voor hen die een meer gevorderde wiskundige opleiding genoten, dat onze conclusie kort kan worden samengevat in de bewering:

$$p(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \text{de matrix } X = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \text{ is positief semidefiniet.}$$

De relatie tussen de matrix X en $p(x)$ is eenvoudig bepaald doordat de som van de elementen in een dwarsdiagonaal van X steeds gelijk is aan een coefficiënt van $p(x)$: de eerste dwarsdiagonaalsom is a, de tweede is b en de derde is c.

Kunnen we iets dergelijks ook doen voor hogeregraads veeltermen? Het verrassende antwoord is: ja! Zonder in te gaan op de technische details is het benodigde recept eenvoudig te geven. Beschouw een veelterm van de m-de graad:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots + p_m x^m.$$

Als de graad m oneven is, dan is er altijd een (positieve of negatieve) waarde van x waarvoor $p(x)$ negatief is. Dus nemen we aan dat de graad m even is. Zeg $m = 2(k-1)$, met $k = 2, 3, \ldots$. Vorm nu een symmetrische $k \times k$ matrix X zodanig dat de som van de elementen op de $(i+1)$-ste dwarsdiagonaal gelijk is aan p_i, voor $i = 0, 1, \ldots, m$. De laatstgenoemde voorwaarde leidt tot een stelsel van $m+1$ (ofwel $2k-1$) lineaire vergelijkingen voor de k^2 elementen van X. Vanwege de symmetrie moet ook gelden $x_{ij} = x_{ji}$, voor alle i en j met $i \neq j$. Dit geeft nog eens $\frac{1}{2}(k^2 - k)$ vergelijkingen. In totaal hebben we dus $\frac{1}{2}(k^2 - k) + 2k - 1$ vergelijkingen voor de k^2 elementen van X. Dit betekent dat er $k^2 - \frac{1}{2}(k^2 - k) - (2k-1) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ vrijheidsgraden zijn. Nu hebben we de volgende eigenschap:

$$p(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{er bestaat een positief semidefiniete ma-} \\ \text{trix } X \text{ waarvan de } (i+1)\text{-ste dwarsdia-} \\ \text{gonaalsom gelijk is aan } p_i \text{ voor } 0 \leq i \leq m. \end{array} \right.$$

Het bewijs van deze bewering berust op een klassieke stelling, namelijk dat een veelterm niet-negatief is dan en slechts dan als hij kan worden geschreven als de som van kwadraten van veeltermen.[7] De genoemde eigenschap heeft verrassende consequenties zoals we nu zullen laten zien.

Stel dat we van een willekeurige veelterm $p(x)$ de minimale waarde z^* willen bepalen:

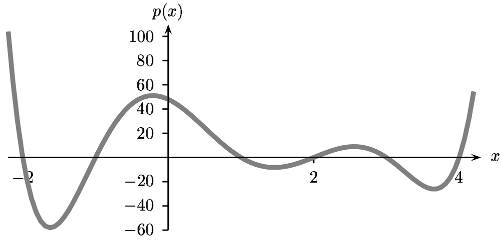
$$z^* = \min \{ p(x) \ : \ x \in \mathbb{R} \}.$$

We merken op dat z^* de grootste waarde van z is waarvoor $p(x) \geq z$ geldt, voor alle $x \in \mathbb{R}$. Echter, $p(x) \geq z$ geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan als de veelterm $p(x) - z$ niet-negatief is. We kunnen dus net zo goed kijken naar het volgende probleem:

$$\max \{ z \ : \ p(x) - z \text{ is niet-negatief} \}.$$

De voorwaarde '$p(x) - z$ is niet-negatief' in dit probleem kan worden vervangen door de voorwaarde dat er een positief semidefiniete matrix X bestaat waarvan de elementen aan een aantal lineaire vergelijkingen voldoen. Daarmee is het probleem herleid tot een semidefiniet optimaliseringsprobleem. En zoals we inmiddels weten (pag. 11) bestaat daarvoor een efficiënt algoritme.

Dit laatste is uitermate verrassend. Immers, een veeltermfunctie is zéér niet-lineair, en (bijna altijd) niet-convex. Zie bijvoorbeeld figuur 15. Een niet-convexe functie kan meerdere (locale) minima hebben. In het



Figuur 15 Grafiek van de veelterm
$p(x) = 48 - 28x - 56x^2 + 35x^3 + 7x^4 - 7x^5 + x^6$.

voorbeeld zijn dat er drie; het meest linkse is het echte (of globale) minimum. Alle klassieke methoden leveren als output één van deze locale minima op, zonder dat bekend wordt welk van de lokale minima is gevonden en hoever dit minimum afwijkt van het globale minimum.

Bovenstaand semidefiniete optimaliseringsprobleem levert gegarandeerd het lokale minimum en een bij de gegeven veelterm behorende matrix waarvan de dwarsdiagonalen de goede sommen hebben. Als oplossing voor de veelterm in figuur 15 vinden we:

$$z^* = -58.0214, \qquad X = \begin{pmatrix} 48.0000 & -14.0000 & -35.9129 & 7.9709 \\ -14.0000 & 15.8257 & 9.5291 & -3.4074 \\ -35.9129 & 9.5291 & 13.8148 & -3.5000 \\ 7.9709 & -3.4074 & -3.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Wat is hier aan de hand? Het bijzondere is dat de semidefiniete formulering van het probleem een convex probleem is. Er zijn namelijk lineaire (dus convexe) beperkingen en de voorwaarde dat de matrix X positief semidefiniet is. De verzameling van zulke matrices is ook een convexe verzameling. Omdat ook de doelfunctie z convex is (want lineair), is het probleem inderdaad convex.

We hebben hier te maken met een voorbeeld van wat wel genoemd wordt *verborgen convexiteit*: een aanvankelijk niet-convex probleem kan door de introductie van een eindig aantal extra variabelen (dit zijn in het voorbeeld de elementen van de matrix X en de variabele z) worden geformuleerd als een convex probleem dat efficiënt oplosbaar is. Deze techniek wordt wel *lifting* genoemd; het toevoegen van extra variabelen betekent namelijk dat we de dimensie verhogen. Met andere woorden, door het probleem in een hoger dimensionale ruimte te bekijken wordt het ineens convex, en daarmee 'gemakkelijk' oplosbaar. Er zijn veel voorbeelden van dergelijke problemen in de regeltechniek, chip design, etc. Door middel van deze lifting-techniek kunnen zulke problemen zodanig worden gemodelleerd dat zij efficiënt oplosbaar zijn. Het moge duidelijk zijn dat modellen van dit type verre van voor de hand liggend zijn en daarom geavanceerde wiskundige vaardigheden vereisen.

We merken tenslotte op dat het bovenstaande alles te maken heeft met een bekend probleem, aan het begin van de vorige eeuw geformuleerd door Hilbert.[8] De algoritmische oplossing van dit probleem volgt uit het feit dat nu ook rationale functies kunnen worden geminimaliseerd. Beschouw het probleem

$$z^* = \min \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \; : \; x \in \mathbb{R} \right\},$$

waarin $p(x)$ en $q(x)$ veeltermen zijn. Hier hebben we nodig dat het quotiënt van twee veeltermen tekenvast is dan en slechts dan als beide veeltermen tekenvast zijn. Aannemend dat $q(x) \geq 0$ geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$, kunnen we bovenstaand probleem daarom herformuleren als

$$\max \{ z \; : \; p(x) - zq(x) \text{ is niet-negatief} \},$$

en daarmee is het probleem herleid tot het vorige geval. Bij wijze van voorbeeld beschouwen we

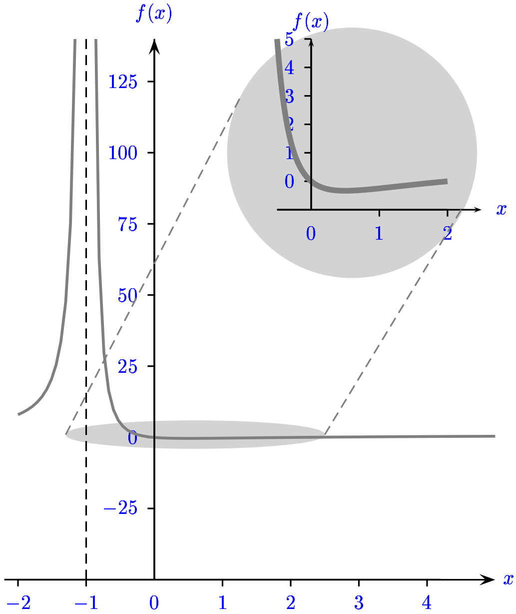
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2}.$$

De grafiek is afgebeeld in figuur 16. We lossen dit probleem op door de grootste waarde van z te bepalen waarvoor de veelterm

$$x^2 - 2x - z(x+1)^2 = (1-z)x^2 - 2(1+z)x - z$$

niet-negatief is. Dit komt neer op het oplossen van het probleem

$$\max_z \left\{ z \; : \; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ is positief semidefiniet} \right\};$$



Figuur 16 Grafiek van de rationale functie $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$.

de oplossing is $z^* = -\frac{1}{3}$. Het moet verbazing wekken hoe makkelijk dit gaat, ondanks het feit dat de te minimaliseren functie een singulariteit heeft in $x = -1$.

Met dit voorbeeld van een toepassing van Semidefiniete Optimalisering had ik het wiskundige deel van mijn rede willen afsluiten. Ik was er daarbij vanuit gegaan dat onze collega en vriend Jos Sturm uit Tilburg vandaag hier zou zijn.

Jos kreeg wereldwijd bekendheid onder andere door zijn computerprogramma SeDuMi dat door veel collega's en anderen wordt gebruikt omdat het een van de beste solvers is voor semidefiniete optimalisering. Het leverde hem grote internationale erkenning[1] op.

Het is anders gelopen. Op 8 october jl. werd hij getroffen door een hersenbloeding. Afgelopen zaterdag overleed hij aan de gevolgen daarvan op 32-jarige leeftijd. Met ontzetting werd deze week gereageerd door collega's van over de hele wereld op het heengaan van deze veelbelovende, talentvolle jonge onderzoeker. Hun en mijn medeleven gaat uit naar zijn vrouw en dochter, zijn ouders, broer en verdere familie.

Ludwig Wittgenstein

Ik zou ook iets zeggen over de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid. Ik ben daarvoor te rade gegaan bij Ludwig Wittgenstein[9], die vrij algemeen wordt beschouwd als de grootste taalfilosoof van de vorige eeuw. Zijn bekendheid dankt hij aan een boekje met de Latijnse titel *Tractatus Logico-Philosophicus* [41]. Het is het enige werk van Wittgenstein dat tijdens zijn leven werd gepubliceerd. Het veelbewogen leven van deze uitzonderlijk boeiende man is onder andere beschreven beschreven door Ray Monk [27].[10] Het onderstaande is voornamelijk ontleed aan deze biografie.

Zijn leven tot 1929

Ludwig Wittgenstein wordt in 1889 te Wenen geboren als jongste van acht kinderen in het zeer rijke Joods-protestantse gezin van de staalmagnaat Karl Wittgenstein. De Wittgensteins zijn de Oostenrijkse tegenhangers van de Duitse Krupps en de Amerikaanse Carnegies en Rothschilds. Ludwig studeert van 1906 tot 1908 technische wetenschappen in Berlijn, en daarna in Manchester vliegtuigbouwkunde. Hij raakt geïnteresseerd in de filosofie van de wiskunde en zoekt op aanraden van de Duitse filosoof en wiskundige Gottlob Frege (1848–1925) contact met de hoogleraar filosofie in Cambridge, Bertrand Russell (1872–1970). Diens colleges over Mathematische Logica worden bezocht door slechts 3 studenten. Hij is dan ook verheugd als in oktober 1911 Wittgenstein als vierde student intekent. Russell raakt na één trimester al overtuigd van het genie van Wittgenstein[11]. Op 1 februari 1912 wordt hij toegelaten tot het Trinity College te Cambridge met Russell als studiebegeleider. Russell raakt steeds meer onder de indruk van Wittgenstein en schrijft aan een collega:

> ‘Hij heeft meer passie voor de filosofie dan ik; vergeleken bij zijn lawines produceer ik niet meer dan sneeuwballen [27, pag. 50].’

Als de eerste wereldoorlog uitbreekt meldt Wittgenstein zich vrijwillig aan om als soldaat dienst te doen in het Oostenrijks-Hongaarse leger.[12] Hij verblijft twee jaar aan het Oostfront in Kraków. Tijdens zijn eerste maand in Galicië bezoekt hij een boekhandel waar hij maar één interessant boek kan vinden: Tolstois *Korte verklaring van het Evangelie.* Hij raakt in de ban van het boek en draagt het altijd bij zich. Onder zijn kameraden staat hij daarom bekend als de 'man met het Evangelie' [27, pag. 120].[13] [14] Tussen de oorlogsbedrijven door voltooit Wittgenstein in 1915 de eerste versie van de *Tractatus*, die helaas niet is bewaard gebleven.[15] Van meet af aan geeft hij uiting aan zijn wens om naar het front te gaan. In maart 1916 wordt hieraan voldaan. Hij verzoekt dan om op de gevaarlijkste plek te worden geplaatst, de waarnemerspost voor de loopgraven.[16] Vanwege dapper gedrag wordt hij voorgedragen voor een onderscheiding. Hij wordt bevorderd, eerst tot *Vormeister*, daarna tot *Korporal.* Uiteindelijk wordt hij naar Olmütz in Moravië gezonden om daar een officiersopleiding te volgen. Op 1 februari 1918 wordt hij bevorderd tot *Leutnant* en op 10 maart ingedeeld bij een regiment bergartilleristen aan het Italiaanse front. In juni neemt hij voor de laatste keer deel aan een aanval in de bergen van Trentino, op Franse, Britse en Italiaanse troepen. Opnieuw wordt hij vanwege zijn dapperheid onderscheiden [27, pag. 156]. Kort daarna, in juli 1918, tijdens een verlofperiode schrijft hij 'Ik heb zojuist het filosofische werk voltooid waaraan ik al in Cambridge begonnen ben'. Het bedoelde werk is de *Tractatus.* Kort daarna, terwijl hij in Italiaanse krijgsgevangenschap verkeert, schrijft hij aan Russell:

> 'Ik heb een boek geschreven dat zal worden gepubliceerd zodra ik thuis ben. Ik denk dat ik onze problemen eindelijk heb opgelost.'[17] [18]

Op 21 augustus 1919 komt hij vrij. Nu hij naar zijn stellige mening het hoofdprobleem van de filosofie heeft opgelost, wil hij zijn leven wijden aan 'nuttiger' zaken. Als 30-jarige schrijft zich in voor een opleiding tot onderwijzer. Hij doet in die tijd ook afstand van het vermogen van zijn familie en vermaakt zijn hele erfdeel aan twee zusters en een broer. Financiële zelfmoord noemt de notaris het.

Ondertussen behaalt hij het onderwijzersdiploma en in 1920 krijgt hij een aanstelling aan de lagere school in het Oostenrijkse dorpje Trattenbach. Trots vermeldt hij als zijn postadres: 'LW Schoolmeester Trattenbach'. In 1922 leidt de bemiddeling van Russell tot publicatie van de *Tractatus*, dit na verschillende mislukte pogingen om een uitgever te vinden, onder andere bij Cambridge University Press.[19] Zijn onderwijzersloopbaan leidt hem langs scholen in verschillende andere Oostenrijkse dorpen (na Trattenberg: Hassbach, Puchberg en Otterthal). Terwijl Wittgenstein zich inspant om schoolkinderen te onderwijzen, begint de *Tractatus* veel aandacht te krijgen in de academische wereld. Al in 1922 wijdt de wiskundige Hans Hahn er een college aan op de universiteit van Wenen. De *Tractatus* trekt ook de aandacht van een groep filosofen in Wenen. Uit deze groep ontwikkelt zich later de beroemde Wiener Kreis van logisch positivisten.[20] Ook in Cambridge is de *Tractatus* al snel het middelpunt van de filosofische discussie. De nog jonge wiskundige Frank Ramsey (19 jaar), student aan Kings college, publiceert in 1923 een bespreking van de *Tractatus* in het filosofische tijdschrift *Mind*, en besluit daarna om Wittgenstein op te zoeken. Wittgenstein leest met hem de hele *Tractatus* door, regel voor regel, ongeveer een bladzijde per uur. Ramsey is zeer onder de indruk. Hij schrijft over Wittgenstein: 'Hij geeft les in de dorpsscholen, van 8 tot 12 of 1 uur. Hij is zeer arm en schijnt een armzalig leven te leiden met maar één vriend hier, en de meeste collega's beschouwen hem als een beetje getikt [27, pag. 213].' Hij maakt ook kennis met zijn familie: 'Ze zijn zeer rijk en willen hem graag geld geven of alles voor hem doen, maar hij weigert al hun inspanningen.' Kort daarna krijgt Wittgenstein een brief van een vriend uit Manchester die als eerste aanzet kan worden beschouwd tot zijn latere terugkeer naar Engeland. In de zomer van 1925 legt hij een bezoek af aan Manchester en bezoekt dan oude bekenden, ook in Cambridge. Toch keert hij weer terug naar Oostenrijk. Pas in april 1926 zegt hij zijn baan als onderwijzer op en gaat dan terug naar Wenen. Daar houdt de Nederlandse wiskundige Brouwer in maart 1928 een lezing met als titel *Wiskunde, natuurwetenschap en taal.*[21]. Wittgenstein is daarbij aanwezig, met Waisman en Feigl, beiden lid van de Wiener Kreis. Na afloop zit het drietal enkele uren in een koffiehuis en volgens het verslag van Feigl:

> '(...) was het fascinerend om de verandering te zien die zich die avond in Wittgenstein had voltrokken. (...) hij werd zeer spraakzaam en begon ideeën te schilderen die het begin vormden van zijn latere geschriften. (...) die avond stond in het teken van Wittgensteins terugkeer tot een hevige filosofische belangstelling en activiteit [27, pag. 244].'

De periode van 1929 tot 1939

Pas in januari 1929 keert Wittgenstein terug naar Cambridge. Zijn status is die van een 'Advanced Student' die college loopt voor een doctorsgraad. Al heel snel, op 18 juni 1929, ontvangt hij die. Als 'proefschrift' fungeert de *Tractatus*. Deze bestaat dan reeds zeven jaar in boekvorm en wordt als een klassiek filosofisch geschrift beschouwd. De promotie zelf is al even uitzonderlijk als het proefschrift. Moore en Russell zijn de examinatoren. Als zij het vertrek binnenkomen waarin het examen werd gehouden, zegt

Figuur 17 Wittgenstein (rechts) en Francis Skinner in Cambridge.

Russell:

> 'Ik heb nog nooit in mijn leven zoiets absurds meegemaakt.'

Het examen begint met een praatje tussen vrienden die elkaar lang kennen. Dan zegt Russell, die geniet van het absurde van de situatie, tegen Moore:

> 'Ga je gang, jij moet hem een paar vragen stellen — jij bent de professor.'

Er volgt een korte discussie. Russell probeert daarin aan te tonen dat Wittgenstein niet consistent is in zijn beweringen. Hij slaagt er niet in Wittgenstein te overtuigen. Deze maakt een eind aan de procedure door beide examinatoren een schouderklopje te geven en daarbij verzoenend op te merken:

> 'Het geeft niet, ik weet dat jullie het nooit zullen begrijpen.'

In zijn verslag van het examen schrijft Moore:

> 'Het is mijn persoonlijke overtuiging dat de dissertatie van mr. Wittgenstein een geniaal werkstuk is. Maar, of dit nu zo is of niet, het werk beantwoordt beslist aan de eisen die worden gesteld voor het behalen van de graad van Doctor in de filosofie aan de Universiteit van Cambridge [27, pag. 264].'

Wittgensteins benoeming tot fellow van het Trinity College, in de herfst van 1930, maakt een eind aan zijn financiële problemen. In de kerstvakantie van dat jaar heeft hij een interessante discussie met Moritz Schlick, de leider van de Wiener Kreis. Schlick onderscheidt twee opvattingen over het wezen van het goede: volgens de eerste is het goede goed omdat het datgene is wat God wil; volgens de tweede wil God het goede omdat het goed is. Wittgenstein vindt de eerste opvattingen diepzinniger, en zegt dan:

> 'Wanneer er een propositie is die precies uitdrukt wat ik denk, dan is het de propositie: Wat God beveelt is goed [27, pag. 295].'[22]

De eerstvolgende jaren houdt hij zich vooral bezig met de filosofie van de wiskunde. Over de grondslagen daarvan woedde in het begin van de 20ste eeuw een hevige strijd tussen verschillende kampen van logici (aangevoerd door Frege en Russell), formalisten (aangevoerd door Hilbert) en intuïtionisten (aangevoerd door Brouwer en Weyl). Wittgensteins bijdrage aan deze strijd is een poging tot ondermijning van de hele basis van deze strijd [27, pag. 316]. Volgens Wittgenstein is het hele idee dat de wiskunde zich bezig zou houden met het ontdekken van waarheden een misverstand, dat zijn oorsprong heeft in de opkomst van de zuivere wiskunde en de scheiding van de wiskunde van de natuurwetenschap ('de onbenutte stoffer die abusievelijk tot het meubilair wordt gerekend'). Wanneer we de wiskunde, zegt hij dan, zouden beschouwen als een reeks *technieken* (om berekeningen te maken, te meten, enz.), dan zou de vraag waar zij om *draaide* eenvoudig niet opkomen [27, pag. 318]. Hij keert zich hiermee tegen Hardy en anderen, die uitgingen van de onveranderlijke en onvoorwaardelijke geldigheid van de mathematische waarheid. Voor Wittgenstein is filosofie, net als wiskunde, een reeks technieken.[23]

Ondertussen wordt zijn leven bemoeilijkt door perioden van grote neerslachtigheid. Hij is dan bang niet te kunnen werken en dat de eenzaamheid hem te veel zal worden.[24] Dan noemt hij 'besef van zonde' iets werkelijks, evenals wanhoop en verlossing door geloof.

> 'Degenen die daarover spreken (Bunyan bijvoorbeeld) beschrijven eenvoudig wat er met hen is gebeurd, ongeacht de glans die iemand

> daaraan wil verlenen.' [25]

Hij dankt God als hij weer goed kan werken, als voor een geschenk dat hij niet verdient. En telkens weer, schrijft hij, wil ik zeggen:

> 'God, wat moet ik doen wanneer Gij me niet helpt?'

Anderzijds schrijft hij ook over de opstanding van Christus, en wat hem ertoe overhaalde daarin te geloven. Want als Hij niet was opgestaan, dan was Christus een leraar zoals anderen,

> 'en kan hij niet meer helpen; en dan zijn we weer alleen en in de steek gelaten als weeskinderen. Dan moeten we ons tevreden stellen met kennis en speculatie.'[26]

Hoogleraar in Cambridge (1929 – 1947)

Door de inlijving van Oostenrijk bij Duitsland, in 1938, wordt Wittgenstein Duits staatsburger en daarmee onderdaan van een macht die hij onder geen beding wil erkennen. In de herfst van dat jaar stelt hij zich kandidaat voor de positie van hoogleraar filosofie, die dan vacant is doordat Moore met pensioen is gegaan. Hoewel overtuigd van zijn geringe kansen, wordt hij alom beschouwd als het meest vooraanstaande filosofische genie van zijn tijd. Zelfs tegenstanders vinden dat de leerstoel aan Wittgenstein te onthouden erop neer zou komen dat men Einstein een leerstoel in de natuurkunde zou weigeren. Zijn benoeming volgt in februari 1939, en daarmee komt de weg vrij voor het Britse staatsburgerschap: op 2 juni 1939 ontvangt hij zijn Britse paspoort.[27]

Zijn colleges over wiskunde vormen een onderdeel van Wittgensteins algemene aanval op de idolatrie van de wetenschap.[28] [29] [30]

> 'Er bestaat geen religieuze richting', schrijft hij, 'waarin het misbruik van metafysische uitspraken verantwoordelijk is voor zoveel zonden als in de wiskunde.'

Hij ziet het als zijn opgave om die metafysica uit te bannen. Wanneer hij bijvoorbeeld de bekende paradox van Russell[31] uit de verzamelingenleer behandelt, doet hij dat op een, vanuit wiskundig oogpunt, opvallend primitieve wijze:

> Neem de tegenspraak van Russell. Er zijn denkbeelden, die we predikaten noemen—'man', 'stoel', en 'wolf' zijn predikaten, maar

> ‘Jaap’ en ‘Jan’ zijn dat niet. Sommige predikaten slaan op zichzelf, andere niet. Zo is ‘stoel’ geen stoel, ‘wolf’ geen wolf, maar ‘predikaat’ is wel een predikaat. U zou kunnen zeggen dat dit kletskoek is. En in zekere zin is het dat ook.

Met dergelijke uitspraken roept hij veel tegenspraak op. Onder zijn toehoorders bevindt zich een van de meest bekwame vertegenwoordigers van de opvatting die Wittgenstein aanvalt: Alan Turing, die later een van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw zal blijken te zijn. De colleges draaien dikwijls uit op een debat tussen beiden. De discussie gaat steeds over de vraag of het mogelijk is om betekenis aan een taal toe te kennen zodanig dat deze op slechts één manier kan worden begrepen. De onmogelijkheid hiervan wordt door Wittgenstein verdedigd. Zijn argumenten hebben een intuïtief karakter. Later, in 1947, illustreert hij het optreden van dubbelzinnigheid met de beroemde ‘duck/rabbit’ afbeelding in figuur 18 [27, pag. 485]. Turing laat zich niet overhalen.

Figuur 18 Illustratie van dubbelzinnigheid in een figuur.

De schoonheid van de wiskunde ligt voor hem juist in de kracht om aan een anderszins onzekere wereld onaantastbare waarheden te verschaffen. Turing voert het pleidooi voor grondslagenonderzoek om te komen tot een wiskunde die gegarandeerd vrij is van tegenspraken. In zijn colleges maakt Wittgenstein de bezorgdheid over verborgen tegenspraken—paradoxen—belachelijk.[32] Als Wittgenstein niet wil toegeven dat een tegenspraak een fataal gebrek is voor een wiskundig stelsel, raakt Turing ervan overtuigd dat een gemeenschappelijke basis voor de discussie ontbreekt en besluit hij de colleges niet verder te volgen.

Het is opmerkelijk te noemen dat Wittgenstein nergens de onvolledigheidsstelling van Gödel noemt. Deze stelling van Gödel, met een rigoreus wiskundig bewijs, stelt in feite Wittgenstein in het gelijk voor het bijzondere geval van de taal der wiskunde![33]

Als in 1939 de tweede wereldoorlog uitbreekt, spant Wittgenstein zich in om werk te vinden dat verband houdt met de oorlog, bijvoorbeeld bij de ambulancedienst. Hij vindt het een onmogelijke toestand dat hij filosofie doceert terwijl er een oorlog gaande is. Hij wil iets ‘nuttigs’ doen. Maar zijn Duitse naam, en Oostenrijkse achtergrond, maken dit in Engeland moeilijk. Via een vriend komt hij in contact met een arts van het Guy’s Hospital te London en deze bezorgt hem een baantje: in dienst van de apotheek van het ziekenhuis bezorgt hij medicijnen aan gewonden tengevolge van de hevige bombardementen in de directe omgeving van en zelfs op het ziekenhuis.

In oktober 1944 keert hij naar Cambridge terug. Daar treft hij Russell weer aan, die dan juist terug is uit Amerika waar hij zes jaar heeft gewerkt, en ook Moore. Wittgenstein bewondert nogal altijd het scherpe verstand van Russell, maar veracht veel van diens populaire werk over ethiek en politiek[34] en heeft weinig goede woorden over voor de vrije levenstijl van Russell.[35] De relatie met de dan al oude, maar nog zeer vitale Moore is beter, maar in feite is hij ook met hem, zoals met alle beroepsfilosofen, altijd in conflict.[36]

Na het hoogleraarschap

In de zomer van 1947 groeit het plan om het hoogleraarschap op te geven en een rustige plek te zoeken om een boek over de filosofie van de psychologie af te maken. Eind 1947 krijgt Wittgenstein op zijn verzoek ontslag en vestigt zich in Ierland.

In Dublin verblijft hij in een hotel op loopafstand van de Royal Zoological Gardens. Hij ontvangt daar veel oud-collega’s en oud-studenten en geniet van wandelingen met hen in deze tuin; daarbij uit hij zijn bewondering voor de geweldige variëteit aan bloemen, heesters en bomen en de vele verschillende soorten vogels, reptielen en zoogdieren.[37] In die tijd voelt hij aan dat het einde van zijn leven nadert. Hij voelt zich vaak vermoeid, ziek, oud, en ongeschikt om te werken. Steeds vaker praat hij met zijn naaste vrienden over religieuze kwesties. Een van zijn vrienden, Drury, citeert tijdens zo’n gesprek een passage uit de Messiah van Händel:

> ‘But who may abide the day of his coming, and who shall stand when he appeareth?’

Wittgenstein zegt dan:

> ‘I think you have just said something very important. Much more important than you realize.’[38]

Na een medische behandeling aan een darmkwaal maakt hij nog een reis naar Amerika. Daar bezoekt hij zijn oud-student Malcolm, die werkzaam is aan de Universiteit van Cornell. Er bestaat een lezenswaardig verslag van een lezing aan deze universiteit die door Wittgenstein werd bijgewoond. Als de voorzitter bekend maakt dat Wittgenstein in de zaal is gaat er een luide verzuchting op van de aanwezige filosofiestudenten. Hun verbazing zou niet zijn overtroffen als gezegd was dat Plato in de zaal verbleef.[39] Al tijdens dit bezoek aan Amerika tobt hij opnieuw met zijn gezondheid. Terug in London blijkt hij aan kanker te lijden. In 1950 bezoekt hij zijn familie in Wenen nog een keer, en leeft daar weer op. Hij houdt er zelfs nog een voordracht. Weer terug in Engeland maakt zijn gezondheidstoestand permanente medische verzorging nodig. Hij ontvangt deze ten huize van een bevriende arts, dr. Bevan, en overlijdt, omringd door vrienden, in diens huis op 29 april 1951, op 62-jarige leeftijd. De volgende ochtend wordt hij in de St.-Gileskerk begraven.

Slotopmerkingen

Ruim een maand geleden, op 29 oktober jl., vroeg de oud-rector Johan Blaauwendraad in zijn afscheidsrede aandacht voor de relatie tussen levensbeschouwing en wetenschapsbeoefening [5]. Ik heb dat vandaag opnieuw willen doen door aandacht te schenken aan Ludwig Wittgenstein.

Wittgenstein was geen geleerde in de gewone zin van het woord. Eerder was hij een ziener, een profeet, die voortdurend in conflict was met zijn vakcollega's [24, pag. 51]. Een voor hem kenmerkende uitspraak is

> '(. . .) maar hiervan ben ik zeker, dat we hier niet zijn om een goede tijd te hebben.'[40]

Zoals eerder gezegd, was de *Tractatus* de enige publicatie van Wittgenstein die tijdens zijn leven verscheen. Het boek werd door slechts weinigen begrepen, en door anderen (waaronder de neo- of logisch-positivisten van de Wiener Kreis) geannexeerd als een basisdocument. Wittgenstein voelde zich niet thuis in de Wiener Kreis, hoewel hij er zijns ondanks een diepgaande invloed op had. Uitgaande van Stelling 1 in de *Tractatus*:

> 'De wereld is alles, wat het geval is.'

was hij op zoek naar de kenmerken van een exacte wetenschappelijke taal. Uit Stelling 6.522 van de *Tractatus*

> 'Er bestaan stellig onuitsprekelijke zaken. Dit *toont* zich, het is het mystieke.'

volgt dat zo'n taal noodzakelijkerwijs een belangrijk deel van de werkelijkheid buiten beschouwing zal laten, omdat dat 'onuitsprekelijk' is in een exacte taal. In feite gaat het dan volgens Wittgenstein over het belangrijkste deel; over zaken die behoren tot het tweede deel van zijn boek, het deel dat hij niet schreef (zie voetnoot 19). Daarom zegt hij in Stelling 6.52 van de *Tractatus*

> 'Wij voelen dat zelfs als alle *mogelijke* wetenschappelijke vragen beantwoord zijn, onze levensproblemen nog helemaal niet zijn aangeroerd. Er blijft dan weliswaar geen vraag meer over; en juist dat is het antwoord.'[41]

Zoals we eerder zagen, geldt zelfs voor 'technische' problemen als het facility location probleem en het handelsreizigersprobleem dat wij die met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid nooit exact zullen kunnen oplossen; we zullen ons tevreden moeten stellen met benaderende oplossingen. Ik zie duidelijke parallellen met de situatie in de natuurkunde. Zowel de macrokosmos als de microkosmos bevatten voor ons nog vele geheimen. En naarmate we er meer van te weten komen, ontstaan steeds weer nieuwe vragen. Richard Feynman (1918-1988), algemeen erkend als een van de grootste natuurkundigen van de twintigste eeuw, gebruikte het beeld van een ui:

> '(...) als er een eenvoudige ultieme wet bestaat die alles verklaart, dan zou het inderdaad erg mooi zijn om die te ontdekken. Maar als blijkt dat het is als een ui met een miljoen lagen (...) dan zullen we dat moeten accepteren.'[42]

Er zijn goede redenen om zich te verbazen over de geweldige resultaten van wetenschap en techniek. Maar er treedt een kwaliteitsverschil op wanneer we naar de natuur kijken. Een vlinder, een bloem, een blad aan een boom, zij kunnen ons met verwondering vervullen. Onlangs vertelde een collega hoogleraar, een vliegtuigbouwkundige, hoe hij met jaloerse blikken de bewegingen van een vlieg kon bekijken. De natuurkundige Cees Dekker, ook hoogleraar aan deze universiteit, liet vorig jaar tijdens een Studium Generale een filmpje zien van de deling van een cel. Dat speelt zich af op het elementairste niveau van het leven. Zo'n filmpje is een wetenschappelijke prestatie van de eerste orde. Maar tegelijkertijd maakt het duidelijk dat we nog maar aan het prille begin staan van ons begrip van wat daar gebeurt.

In mijn Leidse oratie, vandaag precies 4 jaar geleden, stond ik stil bij een andere grote wetenschapper, Isaac Newton. Voor hem, en in zijn tijd werd dat nog min of meer als normaal beschouwd, was het vanzelfsprekend dat de geschiedenis niet een aaneenschakeling is van toevalligheden: er is een Regisseur. Ik heb toen betoogd hoe Newton zijn hele leven bezig was met de profetie in de Bijbel. Deze is ons volgens Newton niet gegeven om daarmee zelf voorspellingen te kunnen doen, maar om er ons achteraf van te overtuigen dat de wereld wordt geregeerd door voorzienigheid.[43] Sommige van zijn resultaten zijn zeer opmerkelijk. Langs een tijdas staat bij het jaar 1899: 'Call to return to Jerusalem', en bij het jaar 1944: ' End of the great tribulation of the Jews' [40]. In aanmerking nemend dat Newton zelf waarschuwde voor de mogelijkheid dat er een onnauwkeurigheid van 1 tot 5 jaar in zijn berekeningen zat is dit verbazingwekkend.[44] Bij sommige profetieën weet Newton de relatie niet te leggen met toekomstige gebeurtenissen. Hij erkent dan volmondig dat hij niet weet hoe en wanneer ze zullen worden vervuld. Maar dat ze zullen worden vervuld, staat voor hem vast. In dit verband waagt hij zich wel aan speculaties, maar hij laat ze voor wat ze waard zijn. Zijn houding vat hij kort zo samen:

> 'Let time be the Interpreter',

laat de tijd onze Uitlegger zijn.[45] Op basis van door Newton neergeschreven verwachtingen is het geen vraag dat als hij de terugkeer van de Joden naar het land der vaderen, na de Holocaust, had meegemaakt hij deze meest ingrijpende gebeurtenissen in de recente geschiedenis zou hebben gezien als vervulling van profetie.

Dankwoord

Geachte aanwezigen, het protocol aan deze universiteit schrijft een kort dankwoord voor. De meeste personen die een rol van betekenis hebben gespeeld tijdens mijn loopbaan aan de TU Delft heb ik al bedankt in mijn oratie aan de Leidse Universiteit.

Met dankbaarheid gedenk ik prof.dr. F. Loonstra, mijn afstudeerhoogleraar en promotor. Ook wil ik prof.dr. F.A. Lootsma noemen. Hij uitnodigde mij in 1982 uit om tot zijn leerstoel toe te treden; zijn onverwachte overlijden eerder dit jaar maakt dat wij hem vandaag opnieuw missen. Ik waardeer het zeer dat mw. Loonstra en mw. Lootsma deze dag kunnen en ook willen meebeleven.

Mijn dank geldt uiteraard ook het college van bestuur en het bestuur van de faculteit, in het bijzonder de decaan prof.dr.ir. Jan van Katwijk.

Mijn vrouw Gerda en ik, zijn opgevoed bij het gezegde "De mens wikt, God beschikt". Onze inmiddels overleden ouders hebben hiermee de toon gezet voor ons leven. Hiervoor zijn wij hen nog altijd dankbaar. In alle eenvoud hebben zij geleefd in de verwachting van de dag van Zijn grote Toekomst, die gerechtigheid en vrede zal brengen.

Laat mij mogen besluiten met enkele regels uit de bekende hymne *Amazing Grace* van de Engelse dichter John Newton die naar deze toekomst verwijzen. De regels bevatten trouwens een prachtige illustratie van de betekenis van het (wiskundige) begrip 'oneindig'.

> *When we've been there*
> *ten thousand years, . . .*
> *we've no less days*
> *to sing God's praise*
> *than when we'd first begun.*

Ik heb gezegd.

Aantekeningen

[1]Sergey Brin (1973) is afkomstig uit Moskou en studeerde wiskunde en informatica aan de Universiteit van Maryland, College Park. Larry Page (1973) studeerde informatica aan de Universiteit van Michigan te Ann Arbor.

[2]Met dank aan collega Robert Bosch, Math. Dpt., Oberlin College, die dit portret vervaardigde. Zie ook http://www.oberlin.edu/math/faculty/bosch.html en http://www.dominoartwork.com/ voor andere portretten.

[3]Anoniem, maar voor Johann Bernouilli was het niet moeilijk er de hand van Newton in te herkennen: hij herkende 'the lion by his claw' [12].

[4]Genoemd naar de Nederlandse fysicus Hendrik Antoon Lorenz, die voor zijn werk over het zogenaamde Zeemaneffect samen met zijn leerling Pieter Zeeman in 1902 de Nobelprijs ontving.

[5]http://www.ilog.com/products/cplex/news/history.cfm

[6]http://www.dashoptimization.com

[7]Het woord *veelterm* mag hier worden vervangen door *rationale functie*, en daarbij mag het aantal variabelen groter zijn dan 1. Dit is in 1927 bewezen door Artin, die hiermee het 17e probleem van Hilbert oploste. Zie [33] voor een recent overzichtsartikel. Het bewijs van Artin was niet constructief. Recentelijk hebben De Klerk en Pasechnik een efficiënt algoritme gevonden dat de decompositie van een rationale functie in 3 variabelen vindt als som van kwadraten, of vaststelt dat zo'n decompositie niet bestaat [22].

[8]Het is het zogenaamde 17e probleem van Hilbert, getiteld *Expression of definite forms by squares*. Een vorm is hier een rationale (gehele) functie (Engels: rational integral function) in een willekeurig aantal variabelen. Een vorm is definiet als er geen reële waarden van de variabelen bestaan waarvoor de waarde van de vorm negatief is. Hilbert stelde de vraag

> 'whether every definite form may not be expressed as a quotient of sums of squares of forms.'

[9]Graag beken ik op het spoor van Wittgenstein te zijn gebracht door lezing van een recent boek van de Delftse emeritus-hoogleraar van den Beukel [4]. Waarvoor dank!

[10]Wittgenstein heeft helaas geen autobiografie nagelaten. Als hij die zou hebben geschreven, zou die vrijwel zeker meer gemeen hebben gehad met de *Belijdenissen* van Augustinus, dan met, bijvoorbeeld, de autobiografie van Bertrand Russell. Dat wil zeggen dat het opschrijven er van in wezen een spirituele daad geweest zou zijn. Hij beschouwde de *Belijdenissen* als het wellicht 'meest serieuze boek dat ooit geschreven is', en citeerde graag de volgende passage uit boek I:

> ‘En wee degenen, die over U zwijgen, omdat die kletskousen een heleboel onzin uitkramen [27, pag. 275].’

[11]‘Ik hou van hem & heb het gevoel dat hij de vraagstukken zal oplossen waar ik te oud voor ben ze op te lossen— alle mogelijke vraagstukken die door mijn werk worden opgeworpen, maar die een frisse geest en de kracht van de jeugd vergen. Hij is de jonge man waar men op hoopt [27, pag. 49].’

[12]Zijn motivatie is niet zozeer patriotisme, maar ‘een intens verlangen om iets moeilijks op zijn schouders te laden en om iets anders te doen dan zuiver intellectueel werk [27, pag. 116].’

[13]Aan Von Ficker, die bij het Oostenrijkse leger was ingedeeld en die bij Wittgenstein zijn beklag deed over de schrikbarende omstandigheden waaronder hij verbleef, met als gevolg slapeloosheid, geestelijke uitputting en vermoeidheid, schreef Wittgenstein:

> ‘U leeft als het ware in het donker voort en u heeft het verlossende woord niet gevonden. En wanneer ik, terwijl ik in wezen toch zo van u verschil, u iets wil aanraden, dan lijkt dat wellicht ezelsdom. Ik waag het er toch op. Kent u de *Korte verklaring van het Evangelie* van Tolstoi? Dit boek heeft mij indertijd praktisch in leven gehouden. Zou u dit boek willen aanschaffen en het lezen? Als u het niet kent, dan kunt u zich ook niet voorstellen welke uitwerking het op een mens kan hebben [27, pag. 135].’

[14]‘Het christendom was voor hem (in deze periode) ‘de enige zekere weg tot geluk’ — niet omdat het een leven na de dood beloofde, maar omdat het in de woorden en de figuur van Christus, een voorbeeld verschafte, een levenshouding, die wanneer men deze navolgde het lijden draaglijk maakte [27, pag. 127].’

[15]Het zou echter kunnen zijn dat het manuscript sinds november jl. in bezit is van de Oostenrijkse Nationale Bibliotheek (ONB). Wat is namelijk het geval? In het Oostenrijkse Puchberg, waar Wittgenstein onderwijzer was, leerde hij Rudolf Koder kennen, een muziek en wiskunde leraar. De twee raakten bevriend en correspondeerden met elkaar tot Wittgensteins dood. Margaret Stonborough-Wittgenstein, een zuster van Wittgenstein gaf Koder als aandenken aan zijn vriend vier manuscripten, waaronder dat van de *Tractatus*. De nabestaanden waren hiervan niet op de hoogte, en deze manuscripten werden daarom heel lang als verloren beschouwd. Na de dood van Koder doken zij in 1997 weer op; in de afgelopen maand (november 2003) werden zij in Berlijn geveild. Voor de som van ca. 750.000 Euro kwamen de manuscripten in bezit van de ONB [38].

[16]‘Werd beschoten’, noteerde hij in zijn dagboek (op 29 april). ‘Dacht aan God. Uw wil geschiede. God sta mij bij.’ In deze tijd noteert hij ook: ‘Hoe alles gesteld is, is God. God is hoe alles gesteld is [27, pag. 145].’

[17]‘Ik geloof alle problemen eindelijk te hebben opgelost. Dit klinkt misschien arrogant, maar ik geloof het toch. Ik heb het boek in augustus 1918 voltooid,

en twee maanden later werd ik prigioniere. Ik heb het manuscript hier bij mij. Ik zou willen dat ik het voor je kon kopiëren, maar het is nogal lang en ik ken geen veilige manier om het je toe te zenden. Je zou het in feite ook niet kunnen begrijpen zonder uitleg vooraf, want het is geschreven in tamelijk korte opmerkingen. (Dit betekent uiteraard dat *niemand* het zal begrijpen; hoewel ik meen dat het kristalhelder is. Het werpt wel heel onze theorie van waarheid, klassen, getallen en al het overige omver.) Ik zal het publiceren zodra ik thuis kom [27, pag. 162].'

[18]De weinigen die het manuscript ter inzage krijgen (Engelmann, Russell en Frege) reageren niet veelbelovend. Frege bijvoorbeeld twijfelt nadrukkelijk aan de exactheid van Wittgensteins taalgebruik, en valt al direct over de eerste zin: 'De wereld is alles, wat het geval is.' Russell komt veel verder, maar gaat toch aan de ware bedoelingen voorbij, vindt Wittgenstein:

> 'De hoofdzaak is de theorie van wat kan worden uitgedrukt (gesagt) door props (i.e., proposities)—d.w.z. door taal—(en, wat op hetzelfde neerkomt, wat kan worden gedacht) en wat niet door props kan worden uitgedrukt, maar slechts getoond (gezeigt); en dat is, naar mijn mening, het kardinale punt van de filosofie [27, pag. 166].'

[19]Na drie mislukte pogingen probeert legt hij zijn probleem voor aan Von Ficker, redacteur van het literaire tijdschrift *Der Brenner*:

> 'Ik vroeg me af of u wellicht genegen wilt zijn u over het arme schepsel te ontfermen. (...) Het werk is strikt filosofisch en tegelijkertijd literair, maar er wordt niet in geleuterd. (...) Van het lezen van het boek zult u namelijk—en dat geloof ik werkelijk—niet veel opsteken. Want u zult het niet begrijpen, de stof zal zeer vreemd op u overkomen. (...) In werkelijkheid is de stof u echter helemaal niet vreemd, want de zin van het boek is ethisch. In een bepaald stadium wilde ik aan het voorwoord een zin toevoegen die er nu niet in voorkomt, maar die ik u nu schrijf, omdat hij wellicht als sleutel kan dienen: ik wilde namelijk schrijven dat mijn werk uit twee delen bestaat: uit wat hier voor u ligt, en alles dat ik *niet* heb geschreven. En juist dit tweede deel is het belangrijkste. Het ethische wordt namelijk door mijn boek als het ware van binnenuit begrensd, en ik ben er van overtuigd dat het, *strikt genomen*, ALLEEN op die manier begrensd kan worden. Kortom, ik geloof: alles waar *veel* mensen tegenwoordig over *leuteren*, heb ik in mijn boek vastgelegd door er over te zwijgen. En daarom zal het boek, wanneer ik me niet zeer vergis, veel uitspreken wat u zelf zou willen zeggen, maar u zult wellicht niet zien dat het er in wordt gezegd. Ik zou u nu willen aanbevelen het *Voorwoord* en het *Slot* te lezen, omdat daarin de betekenis het meest direct tot uitdrukking komt.'

Ook deze poging leidt niet tot het vinden van een uitgever [27, pag. 179].

[20]'Om Wittgenstein zover te krijgen dat hij deze bijeenkomsten (van de Wiener Kreis) wilde bezoeken, had Schick (de leider van de Wiener Kreis) hem moeten verzekeren dat de discussie niet filosofisch hoefde te zijn, hij mocht ieder onderwerp aansnijden dat hij wenste. Soms keerde Wittgenstein zijn gehoor de rug toe, en begon dan tot hun grote verbazing poëzie voor te dragen. In het bijzonder — alsof hij voor hen wilde benadrukken, zoals hij eerder aan Von Ficker had uitgelegd, dat wat hij *niet* had gezegd in de *Tractatus* belangrijker was dan wat hij wel had gezegd — las hij de gedichten voor van Rabindranath Tagore, een Indische dichter die in die dagen in Wenen zeer in de mode was en in wiens gedichten een mystiek wereldbeeld tot uitdrukking komt dat lijnrecht tegenover dat van Schlicks kring stond [27, pag. 238].'

[21]De Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer was de grondlegger van het zogenaamde *intuïtionisme* in de wiskunde. Hij verwierp het idee dat de wiskunde op de logica kon worden gegrondvest, of dat dit nodig zou zijn. Verder wees hij van de hand dat consistentiebewijzen in de wiskunde noodzakelijk zouden zijn. Hij verwierp ook de 'objectiviteit' van de wiskunde, in de zin waarin zij meestal wordt opgevat. Voor Brouwer bestaat er geen wiskundige werkelijkheid die onafhankelijk is van de geest, waaromtrent wiskundigen ontdekkingen kunnen doen. In de visie van Brouwer is de wiskundige niet iemand die ontdekt, maar een schepper; de wiskunde is geen raamwerk van feiten, maar een constructie van de menselijke geest. Overigens: ruim tien jaar later, in 1939, velde Wittgenstein een hard oordeel over Brouwer. In zijn colleges over de grondslagen van de wiskunde zei hij grofweg tegen zijn toehoorders: 'Intuïtionisme is kolder — van a tot z [27, pag. 244-245].'

[22]Schlick had in 1930 een boek over ethiek gepubliceerd waarin hij bij het behandelen van theologische ethiek verschil had gemaakt tussen twee opvattingen over het wezen van het goede: volgens de eerste is het goede goed omdat het datgene is wat God wil; volgens de tweede wil God het goede omdat het goed is. De tweede opvatting, vond Schlick, was diepzinniger. Integendeel, hield Wittgenstein vol, de eerste is diepzinniger: 'Want deze snijdt iedere weg tot een verklaring af 'waarom' het goed is, terwijl de tweede de oppervlakkige, rationalistische versie is, die zich gedraagt 'alsof' je reden zou kunnen geven voor wat goed is':

> 'De eerste opvatting stelt duidelijk dat het wezen van het goede niets met feiten te maken heeft en daarom ook niet door een propositie kan worden verklaard. Wanneer er een propositie is die precies uitdrukt wat ik denk, dan is het de propositie: 'Wat God beveelt is goed' [27, pag. 295].'

[23]Ik mag hier wel opmerken hoe goed de naam *Optimaliseringstechnieken* van mijn leerstoel aansluit bij deze opvatting van wiskunde!

[24]'Ik ben helemaal verstrikt in kleingeestigheid. Ik ben geïrriteerd, denk alleen

aan mijzelf en ik voel dat mijn leven ellendig is, en daarbij heb ik er geen flauw benul van, hoe ellendig het is [27, pag. 360].'

[25]'Het christelijk geloof is geen doctrine, ik bedoel, geen theorie over wat er met de menselijke ziel is gebeurd en zal gebeuren, maar een beschrijving van iets dat daadwerkelijk plaatsvindt in het leven van de mens. Want 'besef van zonde' is iets werkelijks, evenals wanhoop en verlossing door geloof. Degenen die daarover spreken (Bunyan bijvoorbeeld) beschrijven eenvoudig wat er met hen is gebeurd, ongeacht de glans die iemand daaraan wil verlenen [27, pag. 361].'

[26]'En geloof is geloof in wat mijn *hart*, mijn *ziel*, nodig heeft, niet mijn speculatieve intelligentie. Want mijn ziel met alle passie, als het ware met vlees en bloed, moet gered worden, niet mijn abstracte verstand. Misschien kunnen we zeggen: alleen *liefde* kan in de opstanding geloven. Of: het is de *liefde* die in de opstanding gelooft. We zouden kunnen zeggen: opofferende liefde gelooft zelfs in de opstanding; omvat zelfs de opstanding [27, pag. 368].'

[27]Monk schrijft: 'De Britse overheid mocht dan een weinig liberaal beleid voeren inzake de toelating van Oostenrijkse Joden, ze kon toch nauwelijks de hoogleraar filosofie aan de Universiteit van Cambridge het staatsburgerschap weigeren [27, pag. 398].'

[28]'Wat een vreemde houding van de geleerden: 'Dat weten we nog niet, maar men kan het weten, en het is alleen een kwestie van tijd, dan zal men het weten!' Alsof dat vanzelf zou spreken [42, pag. 78].'

[29]'Jeans heeft een boek geschreven, *The Mysterious Universe*, en ik vind dat walgelijk en zou het misleidend willen noemen. Neem nu de titel... Ik zou kunnen zeggen dat de titel *The Mysterious Universe* op een vorm van afgoderij slaat, waarbij de Wetenschap en de Wetenschappers de afgoden zijn [27, pag. 388].'

[30]'Zowel de atheïst, die zich schamper uitlaat over religie omdat hij geen bewijs voor de geloofspunten vindt, als de gelovige, die het bestaan van God probeert aan te tonen, zijn ten prooi gevallen aan het 'andere' — aan de idolatrie van de wetenschappelijke manier van denken. Religieus geloof is niet analoog aan wetenschappelijke theorieën, en dient derhalve niet te worden aanvaard of afgewezen op dezelfde bewijsgronden [27, pag. 393].'

[31]Russell beschrijft in zijn autobiografie hoe hij de paradox ontdekte als volgt:

> 'At the end of the Lent Term, Alys and I went back to Femhurst, where I set to work to write out the logical deduction of mathematics which afterwards became Principia Mathematica. I thought the work was nearly finished, but in the month of May I had an intellectual set-back almost as severe as the emotional set-back which I had had in February. Cantor had a proof that there is no greatest number, and it seemed to me that the number of all the things in the world ought to be the greatest possible. Accordingly, I examined his proof with some minuteness, and endeavoured to apply it to the class of all the things there are. This led me to

consider those classes which are not members of themselves, and to ask whether the class of such classes is or is not a member of itself. I found that either answer implies its contradictory. At first I supposed that I should be able to overcome the contradiction quite easily, and that probably there was some trivial error in the reasoning. Gradually, however, it became clear that this was not the case. Burali-Forti had already discovered a similar contradiction, and it turned out on logical analysis that there was an affinity with the ancient Greek contradiction about Epimenides the Cretan, who said that all Cretans are liars. A contradiction essentially similar to that of Epimenides can be created by giving a person a piece of paper on which is written: 'The statement on the other side of this paper is false.' The person turns the paper over, and finds on the other side: 'The statement on the other side of this paper is true.' It seemed unworthy of a grown man to spend his time on such trivialities, but what was I to do? There was something wrong, since such contradictions were unavoidable on ordinary premises. Trivial or not, the matter was a challenge. Throughout the latter half of 1901 I supposed the solution would be easy, but by the end of that time I had concluded that it was a big job. I therefore decided to finish The Principles of Mathematics, leaving the solution in abeyance. In the autumn Alys and I went back to Cambridge, as I had been invited to give two terms' lectures on mathematical logic. These lectures contained the outline of Principia Mathematica, but without any method of dealing with the contradictions.'

[32]Neem nu het geval van de paradox van de leugenaar, stelde Wittgenstein voor:

> 'Het is toch eigenlijk heel raar dat iemand dit raadselachtig vindt—veel eigenaardiger dan u zou denken: dat een mens zich hier druk over zou maken. Want het gaat als volgt: als iemand zegt 'ik lieg', zeggen we dat daaruit volgt dat hij niet liegt, en daaruit volgt dat hij liegt, enzovoort. Maar wat dan nog? Je kunt zo doorgaan tot je een ons weegt. Waarom ook niet? Het doet er niet toe [27, pag. 403].'

[33]Zie hierover ook C.B.J. Jongeneel [17], die verdedigt dat de stelling van Gödel een bijzonder geval is van stelling 6.522 uit de *Tractatus*: 'Er bestaan stellig onuitsprekelijke zaken. Dit *toont* zich, het is het mystieke.' De taal van de wiskunde, noch enige andere formele taal biedt ons de mogelijkheid van een taal die gegarandeerd vrij is van contradicties.

[34]Tegen Maurice Drury zei Wittgenstein ooit:

> 'De boeken van Russell zouden in twee verschillende kleuren moeten worden gebonden: de boeken over mathematische logica in het rood

> — en alle filosofiestudenten zouden ze moeten lezen; en de boeken over ethiek en politiek in het blauw — en geen mens zou ze eigenlijk mogen lezen [27, pag. 451].'

[35]Toen iemand tijdens een discussie in Cambridge Russells opvattingen over huwelijk, seks en 'vrije liefde' wilde verdedigen (die hij heeft verwoord in *Marriage and Morals*), reageerde Wittgenstein:

> 'Wanneer iemand mij vertelt dat hij op de verschrikkelijkste plaatsen is geweest, heb ik niet het recht een oordeel over hem te vellen, maar wanneer hij mij vertelt dat hij daar terecht is gekomen door zijn superieure wijsheid, dan weet ik dat hij een charlatan is [27, pag. 285].'

[36]Wittgenstein had ernstige kritiek op het boek *The Philosophy of G.E. Moore*. Nadat hij erover had gehoord schreef hij aan Moore:

> 'Ik ben bang dat je nu op de rand van de rots balanceert aan de voet waarvan ik heel wat wetenschappers en filosofen morsdood zie liggen, onder andere Russell [27, pag. 453].'

[37]'Hij legde de nadruk op de onherleidbare afwisseling van het leven. Tijdens het wandelen in de Zoological Gardens uitte hij zijn bewondering voor de geweldige variëteit aan bloemen, heesters en bomen en de vele verschillende soorten vogels, reptielen en zoogdieren. Een theorie die één enkel schema aan deze diversiteit wilde opdringen was, zoals men kon voorspellen, voor hem uit de boze. Darwin moest het bij het verkeerde eind hebben: zijn theorie 'heeft niet de vereiste veelzijdigheid [27, pag. 511].'

[38]M.O'C.Drury doet verslag van een gesprek als volgt [34, page 161] (ook [27, page 514]): I told Wittgenstein I was reading some of the early Church Fathers, at the moment Tertullian.
W.: I am glad you are doing that. You should continue to do so.
D.: I had been reading Origin before. Origin taught that at the end of time there would be a final restitution of all things. That even Satan and the fallen angels would be restored to their former glory. This was a conception that appealed to me – but it was at once condemned as heretical.
W.: Of course it was rejected. It would make nonsense of everything else. If what we do now is to make no difference in the end, then all the seriousness of life is done away with. Your religious ideas have always seemed to me more Greek than biblical. Whereas my thoughts are one hundred per cent Hebraic.
D.: Yes I do feel that, when, say, Plato talks about the gods, it lacks sense of awe which you feel throughout the Bible – from Genesis to Revelation. *But who may abide the day of his coming, and who shall stand when he appeareth?* (Mal. 3:2).
W.: I think you have just said something very important. Much more important than you realize.

[39]In 1949, aan het begin van het herfstsemester, nam Malcolm Wittgenstein mee naar een bijeenkomst van de doctoraalstudenten filosofie aan de Cornell Universiteit. Zijn aanwezigheid daar sloeg, zoals John Nelson zich herinnert, in als een bom. Deze schrijft [27, pag. 530]:

> Kort voordat de bijeenkomst zou beginnen, liep Malcolm door de gang. Op zijn arm leunde een onaanzienlijke, oudere man, gekleed in een windjack en een oude legerbroek. Als zijn gezicht niet zo'n intelligentie had uitgestraald, zou je hem voor een zwerver hebben gehouden die Malcolm onderweg had opgepikt en had besloten mee te brengen zodat hij niet in de kou hoefde te blijven. (...) Ik fluisterde tegen Gass, 'Dat is Wittgenstein'. Gass dacht dat ik een grap maakte en hij zei toen zoiets als: 'Neem je zuster in de maling'. En toen kwamen Malcolm en Wittgenstein binnen. (Gregory) Vlastos werd aan ons voorgesteld en hield zijn voordracht. Black, die bij deze gelegenheid de voorzitter was, stond op en keek naar rechts, en toen werd tot ieders verbazing duidelijk (...) dat hij de haveloze man wilde aanspreken die door Malcolm was meegebracht. Toen volgden de verbluffende woorden, want Black zei: 'Misschien wilt u zo vriendelijk zijn, professor Wittgenstein (...)' Zodra Black 'Wittgenstein' had gezegd klonk er een luide verzuchting van de aanwezige studenten. U moet niet vergeten: 'Wittgenstein' was in 1949 een raadselachtige en ontzagwekkende naam in de filosofische wereld, en zeker aan Cornell. De verzuchting die toen klonk was dezelfde verzuchting die geslaakt zou zijn wanneer Black had gezegd: 'Misschien wilt u zo vriendelijk zijn, Plato ... '

[40]John King schreef over Wittgenstein:

> 'I saw him as a man of high moral, intellectual and artistic integrity and behavior, tolerant of those who had less ability than himself and never censorious except of what he considered humbug, hypocrisy, affectation and the like. He would tolerate nothing second-rate. And I felt that he was a man who saw a high seriousness and purpose in life. In his own words, which came to my knowledge only recently: 'but of this I am certain, that we are not here in order to have a good time'. What I learned from him was some faint understanding that philosophy would not answer my questions. I learned also what I see to be the essence of Christianity, an appreciation of it symbolism and its profundity. And I learned something of the ethical and the mystical, things which I find difficult to express and of which indeed according to his philosophy 'one cannot speak' [34, page 75].'

[41]Zie ook Van Peursen [39, pag. 61]:

> Maar dit is, nogmaals, geen 'oplossing' in de gewone zin van het woord en Wittgenstein zegt dan ook, dat als alle wetenschappelijk,

> zinvolle gestelde, vragen opgelost zijn, de levensproblemen niet eens aangeroerd zijn; weliswaar blijven er dan geen vragen over, maar dat is dan net het antwoord (6.52). 'De oplossing van het probleem van het leven bemerkt men aan het verdwijnen van het probleem'(6.521)). Maar bedoelt Wittgenstein dit alles dan negatief, in de zin dat het mystieke een begoocheling door zinloze taal betekent en dus in het geheel niet bestaat? Neen, het is niet bestaanbaar als in taal te verwoorden probleem, maar daarom is het er nog wel: 'Het onuitsprekelijke bestaat alleszins. Het tóónt zich, het is het mystieke'(6.522).

[42] Richard Feynman was zeer sceptisch ten aanzien van de mogelijkheid om een universele beschrijving van de natuurwetten te vinden. Gleick citeert hem in dit verband als volgt [11, page 432]:

> 'People say to me, 'Are you looking for the ultimate laws of physics?' No, I am not. (...) If it turns out there is a simple ultimate law which explains everything, so be it — that would be very nice to discover. If it turns out it's like an onion with millions of layers ..., then that's the way it is.'

Verder schrijft Gleick: 'He (i.e., Feynman) believed that his colleagues were claiming more success at unification than they had achieved—that disparate theories had been pasted together tenuously. When Hawking said, 'We may now be near the end of the search for the ultimate laws of nature,' many particle physicists agreed. But Feynman did not. 'I've had a lifetime of that,' he said, on another occasion. 'I've had a lifetime of people who believe that the answer is just around the corner.'

> 'But again and again it's been a failure. Eddington, who thought that with the theory of electrons and quantum mechanics everything was going to be simple (...) Einstein, who thought that he had a unified theory just around the corner but didn't know anything about nuclei and was unable of course to guess it (...) People think they're very close to the answer, but I do not think so (...). Whether or not nature has an ultimate, simple, unified, beautiful form is an open question, and I don't want to say either way.'

[43] Dobbs schrijft: 'The purpose of attempting to interpret prophecy was *not* to foretell 'times and things', Newton said, nor 'to gratify men's curiosities' about the future. God had given the prophecies so that human beings might match them with their fulfilments and so produce 'a convincing argument that the world is governed by providence.'Just as historical facts might enable the interpreter of prophecy to choose between possible interpretations of the mysterious prophetic words, so laboratory results might enable the philosophical alchemist to choose between possible interpretations of the occult knowledge buried in alchemic texts. In either case, for Newton, it was only firm correspondence of fact with

interpretation that would enable him to do what he most wanted to do: provide an irrefutable demonstration of God's providential action the world ([8], page 165).'

[44]Als men bedenkt dat in 1897 het eerste Internationale Zionistische Congres werd gehouden in Basel, waar Herzl de Joden opriep om terug te keren naar Palestina om daar een Joodse staat te stichten, en verder dat het einde van de Holocaust in 1945 zonder veel fantasie kan worden beschouwd als het einde van 'de grote verdrukking van de Joden', dan ligt de conclusie voor de hand. Newton zou deze gebeurtenissen hebben aangewezen als 'convincing arguments that the world is governed by providence'.

[45]'Now while such a return from captivity was the expectation of Israel, even before the times of Daniel, I know not why Daniel should omit it in his prophecy. This part of the Prophecy being therefore not yet fulfilled, I shall not attempt a particular interpretation of it but content myself with observing, that as the seventy and the sixty two weeks were Jewish weeks, ending with sabbatical years, so the seven weeks are the compass of a Jubilee, and begin and end with actions proper for a Jubilee, and of the highest nature for which a Jubilee can be kept and that since the commandment to return and to build Jerusalem, precedes the Messiah the Prince 49 years, it may perhaps come forth not from the Jews themselves, but from some other kingdom friendly to them, and precede their return from captivity, and give occasion to it; and lastly, that this rebuilding of Jerusalem and the waste places of Judah is predicted in Micah 7:11; Amos 9:11,14; Ezek 36:33,35,36,38; Isa 54: 3,11,12; 55:12; 61:4; 65:18,21,22, and Tobit 14: 5; and that the return from captivity and coming of the Messiah and his kingdom are described in Daniel 7; Rev. 19, Acts 1, Mat. 24, Joel 3, Ezek 36, 37, Isa 60, 62, 63, 65 and 66, and many other places of scripture. The manner I know not. Let time be the Interpreter [32, page 134].'

Referenties

[1] E. Aarts and J.K. Lenstra (eds.). *Local Search in Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, London, UK, 1997.

[2] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. *Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms and Engineering Applications*, volume 2 of *MPS-SIAM Series on Optimization*. SIAM, Philadelphia, USA, 2001.

[3] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust optimization—methodology and applications. *Math. Program.*, 92(3, Ser. B):453–480, 2002.

[4] A. van den Beukel. *Waarom blijf ik? Gedachten over geloof, theologie en wetenschap*. Ten Have B.V., Baarn, 2003.

[5] J. Blaauwendraad. *Hulde aan Gigas, mechanica voor bouw en offshore*. Technische Universiteit Delft, october 2003. Afscheidsrede.

[6] G. Cornuéjols, G. L. Nemhauser, and L. A. Wolsey. The uncapacitated facility location problem. In P. Mirchandani and R. Francis, editors, *Discrete Location Theory*, pages 119–171. John Wiley and Sons, New York, 1990.

[7] G. B. Dantzig, R. Fulkerson, and S. M. Johnson. Solution of a large-scale traveling salesman problem. *Operations Research*, 2:393–410, 1954.

[8] B.J.T. Dobbs. *The Janus faces of genius: the role of alchemy in Newton's thought*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.

[9] S.-C. Fang and S. Puthenpura. *Linear Programming and Extensions: Theory and Algorithms*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[10] T.A. Feo and G.C. Resende. Greedy randomised adaptive search procdures. *Journal on Global Optimization*, 6:109–133, 1995.

[11] James Gleick. *Genius: The Life and Science of Richard Feynman*. Vintage Books, New York, 1992.

[12] James Gleick. *Isaac Newton*. Pantheon Books, New York, 2003.

[13] F. Glover and M. Lugana. *Tabu search*. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1997.

[14] Sudipto Guha and Samir Khuller. Greedy strikes back: improved facility location algorithms. *J. Algorithms*, 31(1):228–248, 1999.

[15] J. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems.* The University of Michigan Press, Ann Arbor, USA, 1975.

[16] http://www.google.com/corporate/history.html.

[17] C.J.B. Jongeneel. *The informatical world view. An inquiry into the methodology of computer science.* PhD thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, juni 1996.

[18] D. B. Judin and A. S. Nemirovskiĭ. Effectiveness of randomization of control. *Problemy Sluchaĭn. Poiska*, xxx(7):22–66, 317, 1978. Adaptation problems in technical systems (Russian).

[19] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.

[20] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademiia Nauk SSSR*, 244:1093–1096, 1979. Translated into English in *Soviet Mathematics Doklady* 20, 191–194.

[21] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr., and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.

[22] E. de Klerk and D.V. Pasechnik. Products of positive forms, linear matrix inequalities, and Hilbert 17-th problem for ternary forms. *European J. of Operational Research*, 2003. Geaccepteerd voor publicatie.

[23] G.A. Klunder and H.N. Post. The shortest path prolem on real road networks. *Transportation Research*, 2003. Submitted.

[24] Jac. Kruidenier. *De tijdgeest verstaan. Historische schetsen van filosofen uit de nieuwe tijd.* De Groot, Goudriaan – Kampen, 1194.

[25] R.E. Marsten, R. Subramaniam, M.J. Saltzman, I.J. Lustig, and D.F. Shanno. Interior point methods for linear programming : Just call Newton, Lagrange, and Fiacco and McCormick! *Interfaces*, 20(4):105–116, 1990.

[26] Cleve Moler. The world's largest matrix computation. *Matlab®. News & Notes*, pages 12–13, 2002.

[27] Ray Monk. *Ludwig Wittgenstein. Het heilig moeten. Een biografie.* Prometheus, Amsterdam, 1991.

[28] G.L. Nemhauser. The age of optimization: Solving large-scale real-world problems. *Operations Research*, 4:5–14, 1994.

[29] A. S. Nemirovskiĭ and D. B. Judin. Effective methods for the solution of convex programming problems of large dimensions. *Èkonom. i Mat. Metody*, 15(1):135–152, 1979.

[30] A. S. Nemirovskiy and D. B. Yudin. Informational complexity of mathematical programming. *Izv. Akad. Nauk SSSR Tekhn. Kibernet.*, xxx(1):88–117, 1983.

[31] Y.E. Nesterov and A.S. Nemirovskii. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming : Theory and Algorithms.* SIAM Publications. SIAM, Philadelphia, USA, 1993.

[32] Isaac Newton. *The Prophecies of Daniel and the Apolcalypse.* Printland Publishers, Hyderabad, India, 1998.

[33] Bruce Reznick. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. In *Real algebraic geometry and ordered structures (Baton Rouge, LA, 1996)*, volume 253 of *Contemp. Math.*, pages 251–272. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[34] Rush Rhees (ed.). *Recollections of Wittgenstein.* Oxford University Press, Ocford, UK, 1984.

[35] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency.* Springer, Berlin, 2003. 3 volumes.

[36] Tele-Atlas. Versie 2001.

[37] V.M. Tikhomorov. *Stories about Maxima en Minima.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1980.

[38] Th. Trenkler. Denkbewegung auf papier. *Der Standard*, page 25, 4 Nov. 2003. Zie ook http://www.inlibris.at/presseframe.htm.

[39] C.A. van Peursen. *Ludwig Wittgenstein.* Het Wereldvenster, Baarn, 1965.

[40] M. White. *The Last Sorcerer.* Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1997.

[41] Ludwig Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus. Vertaald en van een nawoord en aantekeningen voorzien door W.F. Hermans.* Atheneum–Polak & Van Gennep, Amsterdam, 1989.

[42] Ludwig Wittgenstein. *Losse Opmerkingen. Een keuze uit de nalatenschap door G.H. von Wright met medewerking van H. Nyman.* De Balie, Amsterdam, 1992.